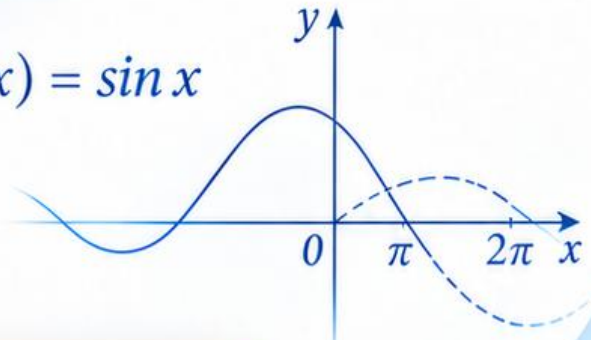
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$f(x) = \sin x$$





أستاذ الرياضيات للشهادة الثانوية

$$a^2 + b^2 = c^2$$

MASTER MATH

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

من الفهم إلى الإتقان



$$ax^2 + bx + c = 0$$



المؤلفة:
الدكتورة سوسن عبد الرحمن

أستاذ الرياضيات للشهادة الثانوية

MASTER MATH — من الفهم إلى الإتقان

تأليف: د. سوسن عبد الرحمن حسن

الرقم الليبي الموحد للكتاب الإلكتروني

LSBN 888-7-0000071-26

8 887000 007126

جميع الحقوق محفوظة للمؤلفة © 2026

لا يجوز نسخ أي جزء من هذا الكتاب أو إعادة نشره بأي وسيلة دون إذن كتابي من المؤلفة.

إهداء

إلى من ربّياني صغيرةً، وغرسا في قلبي حبّ العلم، وكانا النور الذي أضاء دربي، والسند الذي اتكأت عليه في مسيرة حياتي...

إلى أبي وأمي، رحمهما الله،

أهدي ثمرة جهدي، عرفانًا بفضلهما، ووفاءً لحبّهما الذي لا يغيب، سائلةً المولى عزّ وجلّ أن يجعل هذا العمل علمًا نافعًا، يمتدّ أجره إليهما، وأن يرفع به درجاتهما في جنات النعيم.

إلى زوجي العزيز وأبنائي الأحباء،

أنتم دفء أيامي، وسندي في مسيرتي، ومصدر قوتي وإلهامي. أهديكم هذا الإنجاز تقديرًا لمحبتكم، وامتنانًا لدعمكم وصبركم، ولكل لحظة كنتم فيها عونًا لي حتى اكتمل هذا العمل.

إلى أبنائي وبناتي من الطلبة والطالبات،

أهديكم هذا الكتاب، آملةً أن يكون رفيقًا نافعًا في رحلتكم العلمية، ومفتاحًا للفهم والإتقان، وخطوةً ثابتة نحو التفوق وتحقيق الطموحات، فأنتم أمل الغد وصنّاع المستقبل.

إلى زملائي وزميلاتي من المعلمين والمعلمات،

حملة رسالة العلم، وبناة العقول، وصنّاع الأجيال، أهديكم هذا الجهد المتواضع، تقديرًا لعطائكم وإخلاصكم، وإيمانًا برسالتكم السامية في نشر المعرفة وبناء المستقبل.

وإلى كل من آمن بأن العلم رسالة، وأن النجاح ثمرة الصبر والمثابرة، وأن المعرفة نور لا ينطفئ...

أهدي هذا العمل، راجيةً أن يترك أثرًا نافعًا، وأن يكون إضافةً متواضعة في طريق العلم والمعرفة.

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

المحتويات

الباب الأول: المصفوفات والمحددات 8

1-1 مفهوم المصفوفة 9

1-2 محورة المصفوفة والمعكوس الجمعي 11

1-3 تساوي المصفوفات 12

1-4 أنواع المصفوفات 15

1-5 العمليات على المصفوفات 19

1-6 المحددات 26

1-7 خواص المحددات 30

الباب الثاني: حساب المثلثات 36

2-1 تذكّر: النسب المثلثية الأساسية 37

2-2 الزوايا المركبة 39

2-3 ضعف الزاوية 43

2-4 المقدار أ جتا θ ± ب جا θ 46

2-5 حل المعادلات المثلثية 48

2-6 إثبات المتطابقات المثلثية 50

الباب الثالث: التفاضل 53

3-1 مفهوم المشتقة وقواعد التفاضل 54

3-2 مشتقة حاصل ضرب دالتين 55

3-3 مشتقة خارج قسمة دالتين 56

3-4 التفاضل الضمني 57

3-5 ميل المنحنى ومعادلتا المماس والعمودي 61

الباب الرابع: تطبيقات التفاضل 68

4-1 معدل التغير 69

4-2 النقط الحرجة (المحلية) ونقط الانقلاب 73

4-3 السرعة والعجلة 77

الباب الخامس: التكامل وتطبيقاته 80

5-1 التكامل غير المحدود 81

5-2 التكامل المحدود 82

5-3 إيجاد المساحات 83

5-4 حجوم الأجسام الدورانية 94

5-5 الحركة في خط مستقيم (تكامل السرعة والعجلة) 101

الباب السادس: تفاضل وتكامل الدوال المثلثية 102

6-1 تفاضل الدوال المثلثية 103

6-2 تكامل الدوال المثلثية 107

6-3 مساحات تحت منحنيات مثلثية 110

الباب السابع: الدوال اللوغاريتمية والأسية 112

7-1 تفاضل الدالة اللوغاريتمية 113

7-2 تكامل الدالة اللوغاريتمية 114

7-3 الدالة الأسية الطبيعية 116

7-4 تفاضل الدالة الأسية 117

7-5 تكامل الدالة الأسية 119

✓ إجابات التمارين 121

كيف تستخدم هذا الكتاب

يجمع هذا الكتاب مفاهيم منهج الرياضيات للصف الثالث الثانوي في سبعة أبواب، وكل باب مقسّم إلى دروس قصيرة تبدأ بالمفهوم ثم القاعدة ثم الأمثلة المحلولة. استخدم الألوان التالية لتعرف نوع كل محتوى بسرعة:

تعريف

المفاهيم والمصطلحات الأساسية التي يجب فهمها جيداً.

قاعدة

القوانين والصيغ التي تُستخدم في الحل، ويُنصح بحفظها.

ملاحظة

استنتاجات ونصائح تساعدك على الحل بشكل أسرع.

تنبيه

أخطاء شائعة يقع فيها الطلاب، انتبه لها.

تذكّر

معلومات سابقة تحتاجها في الدرس.

إطار الإجابة

الإجابة النهائية تظهر داخل إطار أخضر:

$$س = 4$$

مثال

نص السؤال.

الحل

خطوات الحل بالتفصيل خطوة بخطوة.

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

تمرين

تمارين للتدريب الذاتي، وتجد إجاباتها في نهاية الكتاب.

اصطلاحات الكتابة

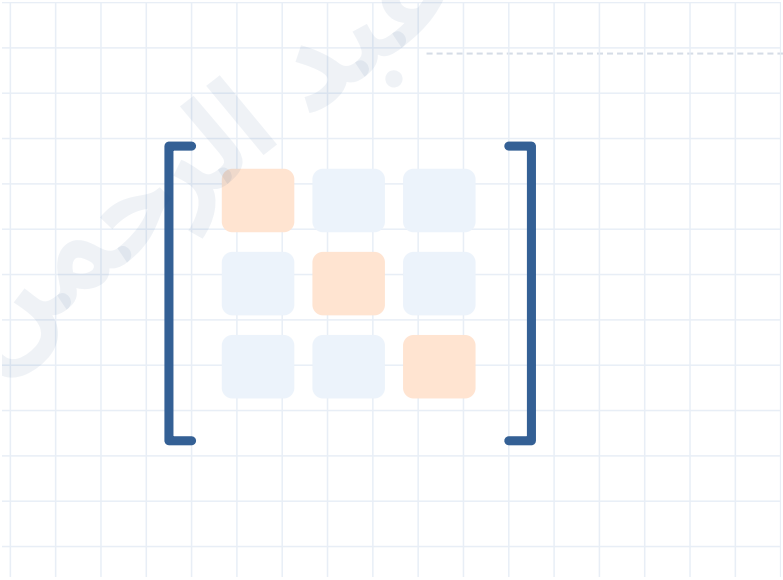
- تُكتب المصفوفات والمعادلات من اليمين إلى اليسار؛ فالعنصر $أ_{11}$ يقع في الركن الأيمن العلوي من المصفوفة.
- $أ^{م}$ محورة المصفوفة أ ، و |أ| أو Δ محددها.
- صَ (أو دص/دس) المشتقة الأولى، و صً المشتقة الثانية.
- لو تعني اللوغاريتم الطبيعي (للأساس هـ)، و ث ثابت التكامل.

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

الباب الأول

المصفوفات والمحددات

- مفهوم المصفوفة ورتبتها
- محورة المصفوفة والمعكوس الجمعي
- تساوي المصفوفات وأنواعها
- العمليات على المصفوفات
- المحددات وخواصها



الدكتورة سوسن عبد الرحمن

1-1 مفهوم المصفوفة

تعريف المصفوفة

المصفوفة ترتيب مستطيل من الأعداد (أو العناصر) مكتوبة على هيئة **صفوف** أفقية و**أعمدة** رأسية، وتُكتب داخل قوسين من النوع [ ] أو ( )، ويُرمز لها عادةً بأحد الحروف: أ ، ب ، جـ ، ...

نرمز للعنصر الواقع في الصف رقم ر والعمود رقم د بالرمز $أ_{رد}$ ، فمثلاً $أ_{23}$ هو العنصر الواقع في الصف الثاني والعمود الثالث. والصورة العامة لمصفوفة بها م من الصفوف و ن من الأعمدة هي:

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} & \cdots & أ_{1ن} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{23} & \cdots & أ_{2ن} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ أ_{1م} & أ_{2م} & أ_{3م} & \cdots & أ_{من} \end{bmatrix}$$



الصفوف أفقية والأعمدة رأسية، والعنصر $أ_{رد}$ يقع عند تقاطع الصف ر مع العمود د

• رتبة المصفوفة (نوعها)

قاعدة

رتبة المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة ، أي ر × د

الدكتور: سيمون عبد الرحمن

مثال 1

حدّد رتبة كل مصفوفة مما يأتي:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\ ،\ \text{ب} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}\ ،\ \text{جـ} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}\ ،\ \text{ع} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل

أ من الرتبة 2×2 ب من الرتبة 2×3 جـ من الرتبة 1×1 ع من الرتبة 1×2

• تحديد موقع العنصر داخل المصفوفة

مثال 2

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 15 \\ 6 & 10 & 11 \end{bmatrix}$ فأوجد: أ_{13} ، أ_{22} ، أ_{33}

الحل

أ_{13} هو عنصر الصف الأول والعمود الثالث ، أ_{22} عنصر الصف الثاني والعمود الثاني ، وهكذا:

$\text{أ}_{13} = 1$ ، $\text{أ}_{22} = 2$ ، $\text{أ}_{33} = 6$

انتبه

الرقم الأول في $\text{أ}_{\text{ر د}}$ يدل دائماً على **الصف** والثاني على **العمود** ؛ فالعنصر $\text{أ}_{31} = 11$ يختلف عن العنصر $\text{أ}_{13} = 1$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

1-2 محورة المصفوفة والمعكوس الجمعي

• محورة المصفوفة

تعريف

محورة المصفوفة أ هي المصفوفة الناتجة من جعل **الصفوف أعمدة والأعمدة صفوفاً** بالترتيب نفسه، ويُرمز لها بالرمز أᵗ . إذا كانت رتبة أ هي ر × د فإن رتبة أᵗ هي د × ر

مثال 3

$$أ = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$أᵗ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

∴ أ ≠ أᵗ

$$ب = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$بᵗ = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ ب ≠ بᵗ

$$جـ = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$جـᵗ = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

∴ جـ = جـᵗ

ملاحظة

محورة المحورة تعيد المصفوفة الأصلية: (أᵗ)ᵗ = أ

• المعكوس الجمعي للمصفوفة

تعريف

لكل مصفوفة أ معكوس جمعي يُرمز له بالرمز -أ ، وينتج من ضرب المصفوفة في -1 ، أي بتغيير إشارة كل عنصر من عناصرها.

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 4

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2 & 5- \\ 4 & 3- \end{bmatrix}$ فإن المعكوس الجمعي لها: -أ = $\begin{bmatrix} 2- & 5 \\ 4- & 3 \end{bmatrix}$

ملاحظة

مجموع المصفوفة ومعكوسها الجمعي يساوي المصفوفة الصفرية: أ + (-أ) = **0**

1-3 تساوي المصفوفات

شرطا تساوي مصفوفتين

1. أن تكون المصفوفتان من **الرتبة نفسها**.
2. أن يساوي كل عنصر في المصفوفة الأولى **العنصر المناظر** له في المصفوفة الثانية.

مثال 5

هل المصفوفتان الآتيتان متساويتان؟ $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 9 & 0 & 3- \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} \sqrt{16} & 5 & \frac{6}{3} \\ 9 & \text{لو } 1 & 3- \end{bmatrix}$

الحل

المصفوفتان من الرتبة نفسها 2 × 3 ، و $\sqrt{16}$ = 4 ، $\frac{6}{3}$ = 2 ، لو 1 = 0

إذن كل عنصر يساوي نظيره، والمصفوفتان **متساويتان**

مثال 6

أوجد قيمة كل من ن ، هـ إذا كانت: $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2- & \text{ن} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 3 & \text{هـ} \\ 2- & 0 \end{bmatrix}$

الحل

بمساواة العناصر المتناظرة: **ن = 0** ، **هـ = 5**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 7

أوجد قيم س ، ص ، ع ، م إذا كانت: $\begin{bmatrix} 2س & س + ع \\ 8 & ص + 3ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ م & س + ص \end{bmatrix}$

الحل

$2س = 8$ ، $س + ع = 7$ ، $س + ص = 8$ ، $م = ص + 3ع$

$\therefore س = 4$ ، $4 + ع = 7 \therefore ع = 3$ ، $4 + ص = 8 \therefore ص = 4$ ، $م = 4 + 9 = 13$

مثال 8

أوجد قيمتي س ، ص إذا كانت: $\begin{bmatrix} 2^{س} & 1 \\ 3 & لو\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 3 & ص \end{bmatrix}$

الحل

$2^{س} = 16 = 2^4 \therefore$ **س = 4**

ص = لو 1 $\therefore$ **ص = 0**

مثال 9

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة 2 × 2 بحيث $أ_{رد} = ر - 2د$ ، فاكتب المصفوفة أ

الحل

نعوّض بقيمتي ر (رقم الصف) و د (رقم العمود) لكل عنصر:

$أ_{11} = 2(1) - 1 = -1$ ، $أ_{12} = 2(2) - 1 = -3$ ، $أ_{21} = 2(1) - 2 = 0$ ، $أ_{22} = 2(2) - 2 = -2$

$\therefore أ = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 10

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة 2 × 2 بحيث $أ_{رد}$ = $\begin{cases} 3 & \text{عندما } ر = د \\ 2 & \text{عندما } ر \neq د \end{cases}$ فاكتب

المصفوفة أ

الحل

عناصر القطر الرئيسي (ر = د) تساوي 3 وباقي العناصر تساوي 2: أ = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

مثال 11

إذا كانت $\begin{bmatrix} 2^{س} & ص \\ 2 & 2^{2ص} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 8 & ب \\ أ & 4 \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة $\frac{ب}{أ}$

الحل

$2^{س} = 8 = 2^3 \therefore س = 3$

$2^{2ص} = 4 = 2^2 \therefore 2ص = 2 \therefore ص = 1$

ب = ص = 1 ، أ = 2

$\therefore \frac{ب}{أ} = \frac{1}{2}$

مثال 12

إذا كانت محورة المصفوفة $\begin{bmatrix} ل + 3 & 4م - 1 \\ 2 - ن & 6هـ \end{bmatrix}$ تساوي المعكوس الجمعي للمصفوفة

$\begin{bmatrix} 2 & 4م \\ ل + 2 & 3ن \end{bmatrix}$ فأوجد قيم ل ، م ، ن ، هـ

الحل

$\begin{bmatrix} ل + 3 & 4م - 1 \\ 2 - ن & 6هـ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & 4م- \\ -(ل + 2) & 3ن- \end{bmatrix}$

ل + 3 = -2 ، 4م - 1 = -(ل + 2) ، 2 - ن = -4م ، 6هـ = -3ن = -18

∴ ل = -5 ، 4م - 1 = 3 ∴ م = 1 ، ∴ ن = 6 ، ∴ هـ = -3

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

الجواب: **ل = -5 ، م = 1 ، ن = 6 ، هـ = -3**

مثال 13

إذا كانت $\begin{bmatrix} س^2 & س \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ل & م \\ ن & هـ \end{bmatrix}$ وكان ل هـ - ن م = -6 فما قيمتا س؟

الحل

من التساوي: ل = $س^2$ ، م = س ، ن = 5 ، هـ = 1

∴ $س^2 \times 1 - 5س = -6$ ∴ $س^2 - 5س + 6 = 0$ ∴ (س - 2)(س - 3) = 0

∴ **س = 2** أو **س = 3**

1-4 أنواع المصفوفات

1) المصفوفة الحقيقية

هي المصفوفة التي جميع عناصرها أعداد حقيقية.

2) مصفوفة الصف

هي المصفوفة المكونة من صف واحد فقط، رتبتها 1 × ن

أ = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & \dots \end{bmatrix}$

3) مصفوفة العمود

هي المصفوفة المكونة من عمود واحد فقط، رتبتها م × 1

4) المصفوفة الصفرية

هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار، ويُرمز لها بالرمز **0** ، وهي **المحايد الجمعي** للمصفوفات:

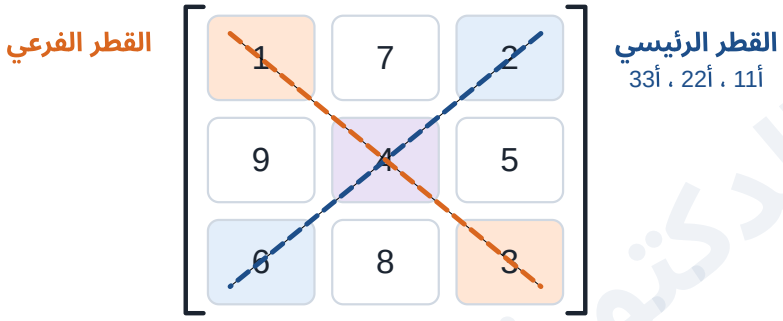
أ + **0** = **0** + أ = أ

أمثلة: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

$$ب = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

5) المصفوفة المربعة

هي المصفوفة التي فيها **عدد الصفوف = عدد الأعمدة** (ر = د)، ولها قطران: **رئيسي** و**فرعي**. عناصر القطر الرئيسي هي $أ_{11}$ ، $أ_{22}$ ، $أ_{33}$ ، …



القطر الرئيسي والقطر الفرعي في مصفوفة مربعة من الرتبة 3 × 3

- العناصر فوق القطر الرئيسي: $أ_{رد}$ حيث ر < د
- العناصر تحت القطر الرئيسي: $أ_{رد}$ حيث ر > د

أمثلة: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$

6) المصفوفة القطرية

مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار **ما عدا** عناصر القطر الرئيسي، أي $أ_{رد} = 0$ عندما ر ≠ د

$$أ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

7) مصفوفة الوحدة

مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 ، ويُرمز لها بالرمز ا ، وهي **المحايد الضربي** للمصفوفات.

$$\text{أ}_{\text{ر د}} = \begin{cases} 1 & \text{عندما ر = د} \\ 0 & \text{عندما ر ≠ د} \end{cases}$$

$$\text{ا} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ، ا} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} \times \text{ا} = \text{ا} \times \text{أ} = \text{أ}$$

8) المصفوفة المثلثية العلوية

مصفوفة مربعة جميع العناصر **أسفل** القطر الرئيسي أصفار، أي $\text{أ}_{\text{ر د}} = 0$ عندما ر > د

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9) المصفوفة المثلثية السفلية

مصفوفة مربعة جميع العناصر **أعلى** القطر الرئيسي أصفار، أي $\text{أ}_{\text{ر د}} = 0$ عندما ر < د

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

10) المصفوفة المتماثلة

مصفوفة مربعة عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي **بالإشارة نفسها**، أي:

$$\text{أ}_{\text{ر د}} = \text{أ}_{\text{د ر}} \text{ ، أي أن } \text{أ}^{\text{م}} = \text{أ}$$

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5- \\ 4 & 6 & 8 \\ 5- & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

11) المصفوفة الملتوية التماثل (شبه المتماثلة)

مصفوفة مربعة عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي **بعكس الإشارة**، وعناصر قطرها الرئيسي أصفار:

الدكتور سيمون عبد الرحمن

أ$_{رد}$ = -أ$_{در}$ ، أي أن أ^{م} = -أ

ومنها: أ + أ^{م} = **0**

$$أ = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7- \\ 4- & 0 & 8 \\ 7 & 8- & 0 \end{bmatrix}$$

مثال 14

أوجد قيم س ، ص ، ع التي تجعل المصفوفة الآتية متماثلة: $\begin{bmatrix} 5 & 2س & ص \\ 8 & 9 & 16 \\ 1 + 2ع & 4ع & 3 \end{bmatrix}$

الحل

في المصفوفة المتماثلة أ$_{رد}$ = أ$_{در}$:

2س = 8 ، 4ع = 16 ، ص = 2ع + 1

∴ س = 4 ، ∴ ع = 4 ، ص = 2(4) + 1 = 9

مثال 15

أوجد قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & س^2 - 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ متماثلة.

الحل

$س^2 - 1 = 3$ ∴ $س^2 = 4$ ∴ **س = ± 2**

مثال 16

أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، د التي تجعل المصفوفة الآتية ملتوية التماثل:

$$\begin{bmatrix} أ - ب & 3 & جـ + د \\ ب & 0 & جـ - ب \\ 8 & 6- & ب + جـ \end{bmatrix}$$

الحل

في المصفوفة الملتوية التماثل: أ$_{رد}$ = -أ$_{در}$ ، وعناصر القطر الرئيسي أصفار.

ب = -3 ، جـ - ب = 6 ، أ - ب = 0 ، جـ + د = -8

جـ + 3 = 6 ∴ جـ = 3 ، ∴ أ = ب = -3 ، 3 + د = -8 ∴ د = -11

الدكتورة ريوسن عبد الرحمن

للتحقق: العنصر $أ_{33}$ = ب + جـ = -3 + 3 = 0 ✓

مثال 17

إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} 7 & 20 - 2س \\ 3 - 6ص & 15 \end{bmatrix}$ قطرية، فأوجد قيمة س + 2ص

الحل

المصفوفة القطرية عناصرها خارج القطر الرئيسي أصفار:

$20 - 2س = 0 \therefore س = 10$

$3 - 6ص = 0 \therefore ص = \frac{1}{2}$

$\therefore س + 2ص = 10 + 2 \left(\frac{1}{2}\right) =$ **11**

1-5 العمليات على المصفوفات

• أولاً: جمع المصفوفات وطرحها

قاعدة

يُشترط لجمع مصفوفتين أو طرحهما أن تكونا **من الرتبة نفسها** ، ويتم الجمع (أو الطرح) بجمع (أو طرح) العناصر المتناظرة.

مثال 18

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 4 & 5- \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ فأوجد: أ + ب ، ب + أ ، أ - ب ، ب - أ

الحل

$أ + ب = \begin{bmatrix} 7 + 4 & 8 + 5- \\ 9 + 2 & 8 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$

الدكتور حسين عبد الرحمن

$$\text{ب} + \text{أ} = \begin{bmatrix} 5-8 & 4+7 \\ 5+8 & 2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} - \text{ب} = \begin{bmatrix} 8-5- & 7-4 \\ 8-5 & 9-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13- & 3- \\ 3- & 7- \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} - \text{أ} = \begin{bmatrix} 5+8 & 4-7 \\ 5-8 & 2-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

نستنتج أن

- عملية الجمع في المصفوفات **إبدالية**: أ + ب = ب + أ
- عملية الطرح في المصفوفات **ليست إبدالية**: أ - ب ≠ ب - أ

ثانياً: ضرب عدد في مصفوفة

قاعدة

عند ضرب عدد حقيقي ك في مصفوفة ، نضرب العدد في **كل عنصر** من عناصر المصفوفة.

مثال 19

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2- & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ فأوجد: 3أ ، $\frac{1}{2}$ أ

الحل

$$3\text{أ} = \begin{bmatrix} 2- \times 3 & 3 \times 3 \\ 5 \times 3 & 4 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6- & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\text{ أ} = \begin{bmatrix} \frac{2-}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1- & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

الدكتورة سوسن عبد الرحيم

مثال 20

إذا كانت س + $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1- & 1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2- \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفة س

الحل

س = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2- \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1- & 1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 - 3 & 4 - 2 \\ 5 - 1- & 2 + 1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 2 & 2- \\ 6- & 3 \end{bmatrix}$

مثال 21

إذا كانت س $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ + ص $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ فأوجد قيمتي س ، ص

الحل

$\begin{bmatrix} 3س \\ 0 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ص \\ ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ∴ $\begin{bmatrix} 3س + ص \\ ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ص = 0

3س + 0 = 1 ∴ س = $\frac{1}{3}$

مثال 22

حل المعادلة المصفوفية: 3 (س - $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$) = 2س + $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1- \end{bmatrix}$

الحل

3س - 2س = $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1- \end{bmatrix}$

3س - 2س = $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1- \end{bmatrix}$

∴ س = $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 17 & 1- \end{bmatrix}$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

ثالثاً: ضرب مصفوفتين

شرط الضرب

يُشترط لضرب المصفوفة أ في المصفوفة ب أن يكون **عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية**. فإذا كانت أ من الرتبة م × ن و ب من الرتبة ن × ك فإن أ × ب من الرتبة م × ك

$$\underset{\text{أ} \times \text{ب}\ (3\times2)}{\begin{bmatrix} 23 & 1 & 10 \\ 25 & 5 & 14 \end{bmatrix}} = \underset{\text{ب}\ (3\times2)}{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \times \underset{\text{أ}\ (2\times2)}{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}}$$

الصف الأول من أ × العمود الثالث من ب : 4×5 + 1×3 = 23

العنصر في الصف ر والعمود د من حاصل الضرب = مجموع حواصل ضرب عناصر الصف ر من الأولى في عناصر العمود د من الثانية

مثال 23

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ فأوجد إن أمكن: أ × ب ، ب × أ

الحل

أ من الرتبة 2 × 2 و ب من الرتبة 2 × 3 ، عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب = 2 ، إذن الضرب ممكن والناتج من الرتبة 2 × 3

$$\text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} 3\times1+5\times4 & 1\times1+0\times4 & 2\times1+2\times4 \\ 3\times5+5\times2 & 1\times5+0\times2 & 2\times5+2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 1 & 10 \\ 25 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

أما ب × أ فلا يمكن إجراؤها؛ لأن عدد أعمدة ب (3) لا يساوي عدد صفوف أ (2).

نستنتج أن

عملية الضرب في المصفوفات **ليست إبدالية**؛ أي أن أ × ب ≠ ب × أ بوجه عام.

الدكتور سولين عبد الرحمن

مثال 24

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة 3 × 2 ، وكان حاصل الضرب أ × ب من الرتبة 3 × 4 ، فما رتبة المصفوفة ب؟

الحل

عدد صفوف ب = عدد أعمدة أ = 2 ، وعدد أعمدة ب = عدد أعمدة الناتج = 4

∴ رتبة ب هي **2 × 4**

• قوى المصفوفة المربعة

مثال 25

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فأثبت أن $أ^2 = 2أ$ ، ثم استنتج أن $أ^ن = 2^{ن-1} أ$

الحل

$$أ^2 = أ \times أ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2أ$$

$$أ^3 = أ^2 \times أ = 2أ \times أ = 2أ^2 = 2(2أ) = 2^2 أ$$

وباستمرار هذا النمط نجد أن: $أ^ن = 2^{ن-1} أ$

مثال 26

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ وكانت $أ^س = \begin{bmatrix} 32 & 32 \\ 32 & 32 \end{bmatrix}$ فما قيمة س؟

الحل

$أ^س = 2^{س-1} أ$ ، و $\begin{bmatrix} 32 & 32 \\ 32 & 32 \end{bmatrix} = 32أ = 2^5 أ$

∴ س - 1 = 5 ∴ **س = 6**

الدكتورة يسوسن عبد الرحمن

قوى بعض المصفوفات الخاصة (للحفظ)

- إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ فإن أ^{ن} = $\begin{bmatrix} 1 & ن \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فإن أ^{ن} = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & ن \end{bmatrix}$
- إذا كانت س = $\begin{bmatrix} 0 & ل \\ ك & 0 \end{bmatrix}$ فإن س^{ن} = $\begin{bmatrix} 0 & ل^{ن} \\ ك^{ن} & 0 \end{bmatrix}$
- إذا كانت س = $\begin{bmatrix} 0 & ل \\ 0 & ك \end{bmatrix}$ فإن س^{ن} = $\begin{bmatrix} 0 & ل^{ن} \\ 0 & ك\, ل^{ن-1} \end{bmatrix}$

مثال 27

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ وكانت أ^{29} = $\begin{bmatrix} ل & م \\ ن & هـ \end{bmatrix}$ فما قيمة ل + م + ن + هـ؟

الحل

أ^{29} = $\begin{bmatrix} 29 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ∴ ل = 1 ، م = 29 ، ن = 0 ، هـ = 1

∴ ل + م + ن + هـ = 1 + 29 + 0 + 1 = **31**

مثال 28

إذا كانت أ^{م} ب^{م} = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ فأوجد ب أ

الحل

نستخدم الخاصية (ب أ)^{م} = أ^{م} ب^{م}

∴ ب أ = [أ^{م} ب^{م}]^{م} = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 29

إذا كانت أ مصفوفة مربعة، وكانت س = أ + أᵀ ، ص = أ - أᵀ ، فأثبت أن:

أ = $\frac{1}{2}$ (س + ص) ، وأن س متماثلة و ص ملتوية التماثل.

الحل

$\frac{1}{2}$ (س + ص) = $\frac{1}{2}$ (أ + أᵀ + أ - أᵀ) = $\frac{1}{2}$ × 2أ = أ ✓

سᵀ = (أ + أᵀ)ᵀ = أᵀ + أ = س إذن س متماثلة.

صᵀ = (أ - أᵀ)ᵀ = أᵀ - أ = -ص إذن ص ملتوية التماثل.

ملاحظات هامة

- أ × أᵀ مصفوفة متماثلة.
- أ + أᵀ مصفوفة متماثلة.
- أ - أᵀ مصفوفة ملتوية التماثل.
- (أ ب)ᵀ = بᵀ أᵀ
- (أᵀ)ᵀ = أ ، **0**ᵀ = **0** ، Iᵀ = I
- أ + **0** = أ ، أ + (-أ) = **0** ، أ × I = أ
- المصفوفة المتماثلة = محورتها.
- المصفوفة الملتوية التماثل = سالب محورتها.
- المصفوفة القطرية = محورتها.
- المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها متساوية = محورتها.
- لأن الضرب غير إبدالي فإن بوجه عام:

$(أ + ب)^2 \neq أ^2 + 2أب + ب^2$

$أ^2 - ب^2 \neq (أ + ب)(أ - ب)$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

تمرين 1

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة 2 × 3 ، و ب مصفوفة من الرتبة (ن + 1) × (م + 5) ، وكان حاصل الضرب أ × ب من الرتبة 2 × 4 ، فأوجد قيمة $\frac{م + ن}{2}$

1-6 المحددات

تعريف

لكل مصفوفة **مربعة** أ عدد حقيقي مصاحب لها يُسمى **محدد المصفوفة** ، ويُرمز له بالرمز |أ| أو Δ ، ويُكتب بين خطين رأسيين بدلاً من القوسين. والمحددات مرتبطة بحل المعادلات الخطية الآنية.

• أولاً: قيمة المحدد من الرتبة الثانية

قاعدة

$$\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix} = أ\,د - ب\,جـ$$

أي: حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي − حاصل ضرب عنصري القطر الفرعي

مثال 30

أوجد قيمة كل من المحددات الآتية:

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} \text{قاهـ} & \text{ظا}^2\text{هـ} \\ 1 & \text{قاهـ} \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} \text{جتاهـ} & \text{جاهـ} \\ -\text{جاهـ} & \text{جتاهـ} \end{vmatrix}$

الحل

1) $\Delta = 3 \times 2 - 4 \times 5 = 6 - 20 = -14$

2) $\Delta = 3 \times 6 - (-2)(4) = 18 + 8 = 26$

3) $\Delta = \text{قا}^2\text{هـ} - \text{ظا}^2\text{هـ} = 1$

4) $\Delta = \text{جتا}^2\text{هـ} - (-\text{جا}^2\text{هـ}) = \text{جتا}^2\text{هـ} + \text{جا}^2\text{هـ} = 1$

تذكّر: متطابقات وقيم مثلثية مفيدة

- $\text{جا}^2\text{هـ} + \text{جتا}^2\text{هـ} = 1$
- $\text{قا}^2\text{هـ} - \text{ظا}^2\text{هـ} = 1$
- $\text{قتا}^2\text{هـ} - \text{ظتا}^2\text{هـ} = 1$
- جاهـ × قتاهـ = 1 ، جتاهـ × قاهـ = 1 ، ظاهـ × ظتاهـ = 1
- ظا 45° = جا 90° = جتا 0° = قتا 90° = قا 0° = 1

مثال 31

إذا كان $\begin{vmatrix} 3\text{س} & -\text{س} \\ 2\text{س} & 5\text{س} \end{vmatrix} = \text{أ س}^2$ فأوجد قيمة أ

الحل

$\text{أ س}^2 = (2\text{س})(-\text{س}) - 5\text{س} \times 3$

$\therefore \text{أ س}^2 = 17\ \text{س}^2 \therefore \text{أ س}^2 = 2\text{س}^2 + 15\text{س}^2$ **أ = 17**

الإلكتروني سوسن عبد الرحمن

مثال 32

حل المعادلة: $\begin{vmatrix} س & -1 \\ 2 & س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} س & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$

الحل

نحسب كل محدد على حدة:

$\begin{vmatrix} س & -1 \\ 2 & س \end{vmatrix} = س^2 - (-2) = س^2 + 2$ ، $\begin{vmatrix} س & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = س - 6$

$\therefore س^2 + 2 + س - 6 = 2 \therefore س^2 + س - 6 = 0 \therefore (س + 3)(س - 2) = 0$

$\therefore$ **س = -3** أو **س = 2**

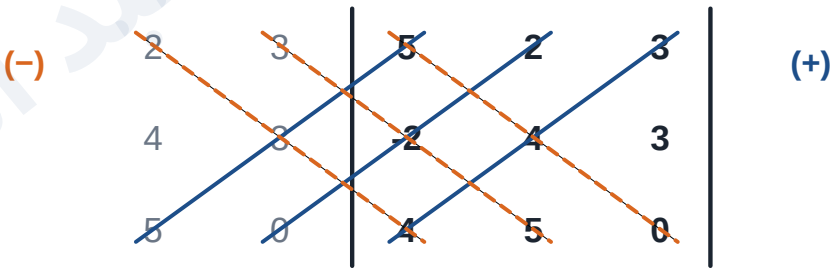
• ثانياً: قيمة المحدد من الرتبة الثالثة

الطريقة الأولى: طريقة الأقطار (ساروس)

نعيد كتابة العمودين الأول والثاني بجوار المحدد، ثم:

قاعدة

Δ = مجموع حواصل ضرب الأقطار الرئيسية − مجموع حواصل ضرب الأقطار الفرعية



نكرر العمودين الأول والثاني على يسار المحدد

طريقة ساروس: الأسهم المتصلة للأقطار الرئيسية (+) والمتقطعة للأقطار الفرعية (−)

مثال 33

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

الحل

الأقطار الرئيسية:

$3 \times 4 \times 4 = 48$

$2 \times (-2) \times 0 = 0$

$5 \times 3 \times 5 = 75$

المجموع $= 123$

الأقطار الفرعية:

$5 \times 4 \times 0 = 0$

$3 \times (-2) \times 5 = -30$

$2 \times 3 \times 4 = 24$

المجموع $= -6$

$\therefore \Delta = 123 - (-6) =$ **129**

الطريقة الثانية: الفك باستخدام المحددات الصغرى (العوامل المرافقة)

نختار صفاً (أو عموداً)، ونضرب كل عنصر فيه في المحدد الصغير الناتج من حذف صفه وعموده، مع مراعاة إشارات المواقع:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

مثال 34

أوجد قيمة المحدد السابق $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ بالفك عن طريق الصف الأول.

الحل

$$+5 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \Delta \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Delta = 3(16 + 10) - 2(12 - 0) + 5(15 - 0) = 78 - 24 + 75 =$ **129**

الدكتور ياسين عبد الرحمن

وهي النتيجة نفسها بطريقة الأقطار.

1-7 خواص المحددات

الخاصية 1: تبديل الصفوف بالأعمدة

لا تتغير قيمة المحدد إذا بُدِّلت الصفوف أعمدة والأعمدة صفوفاً (أي $|\text{أ}^{م}| = |\text{أ}|$)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

الخاصية 2: تبديل صفين أو عمودين

تتغير **إشارة** المحدد (دون قيمته العددية) إذا بُدِّل موضعا صفين أو عمودين.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = 2$$

الخاصية 3: متى تنعدم قيمة المحدد؟

تكون $\Delta = 0$ في الحالات الآتية:

- إذا كانت جميع عناصر صف (أو عمود) أصفاراً: $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$
- إذا تساوى صفان (أو عمودان): $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (العمود الأول = العمود الثالث)
- إذا تناسبت عناصر صفين (أو عمودين): $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (العمود الثاني = 2 × العمود الأول)
- إذا كان صف (أو عمود) ناتجاً من جمع أو طرح صفين (أو عمودين) آخرين:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 9 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 0$$ لأن: $ص_3 = ص_2 + ص_1$ (ص ترمز للصف)

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

الخاصية 4: ضرب المحدد في عدد

عند ضرب المحدد في عدد حقيقي ك نضرب العدد في عناصر **صف واحد فقط أو عمود واحد فقط**.

مثال 35

إذا كانت $|أ| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ فاكتب $2|أ|$ في صورة محدد.

الحل

يمكن ضرب أي صف أو أي عمود (واحد فقط) في 2:

$$2|أ| = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$$

لا تخلط بين المصفوفة والمحدد

عند ضرب **مصفوفة** في عدد نضرب جميع عناصرها، أما **المحدد** فنضرب صفاً واحداً أو عموداً واحداً. ولهذا إذا كانت أ مربعة من الرتبة ن × ن فإن: $|ك أ| = ك^{ن} |أ|$

الخاصية 5: إخراج عامل مشترك

إذا وُجد عامل مشترك ك في عناصر صف (أو عمود) أمكن إخراجه خارج المحدد:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 27 \\ 6 & 2 & 18 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

الخاصية 6: المحدد المثلثي

- إذا كانت جميع العناصر فوق القطر الرئيسي (أو تحته) أصفاراً فإن: Δ = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي.
- إذا كانت جميع العناصر فوق القطر الفرعي (أو تحته) أصفاراً في محدد من الرتبة الثالثة فإن: Δ = - (حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي).

الدكتور نيوتن عبد الرحمن

مثال 36

أوجد قيمة كل من المحددات الآتية:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 4 & 5- & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1- & 4- \end{vmatrix}$

الحل

1) مثلثي (أصفار فوق القطر الرئيسي):

$\Delta = 3 \times 5 \times 1 = 15$

2) أصفار فوق القطر الفرعي:

$\Delta = -(1 \times 3 \times 6) = -18$

3) المصفوفة ملتوية التماثل من الرتبة الثالثة:

$\Delta = 0$

ملاحظة

محدد المصفوفة الملتوية التماثل من الرتبة الثالثة (وأي رتبة فردية) يساوي صفراً دائماً.

مثال 37

إذا كان $\begin{vmatrix} ع & 0 & 0 \\ 1 & 3ع - 1 & 0 \\ 16 & 5 & ع + 1 \end{vmatrix} = 0$ فأوجد قيم ع

الحل

المحدد مثلثي، إذن قيمته = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي:

$ع(3ع - 1)(ع + 1) = 0$

$\therefore$ **ع = 0** أو $ع = \frac{1}{3}$ أو **ع = -1**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 38

بدون فك المحدد، أثبت أن: $\begin{vmatrix} ب + جـ & 5 & أ \\ جـ + أ & 5 & ب \\ أ + ب & 5 & جـ \end{vmatrix} = 0$

الحل

بإضافة عناصر العمود الثالث إلى العمود الأول ($د_1 + د_3$):

$$\begin{vmatrix} أ + ب + جـ & 5 & أ \\ أ + ب + جـ & 5 & ب \\ أ + ب + جـ & 5 & جـ \end{vmatrix} = 5(أ + ب + جـ) \begin{vmatrix} 1 & 1 & أ \\ 1 & 1 & ب \\ 1 & 1 & جـ \end{vmatrix}$$

بعد إخراج العامل المشترك (أ + ب + جـ) من $د_1$ و 5 من $د_2$ أصبح العمودان الأول والثاني متساويين ∴ Δ = 0

الخاصية 7: جمع المحددات

إذا تساوت محددات في جميع الصفوف ما عدا صفاً واحداً، فإن مجموعها محدد واحد يُجمع فيه ذلك الصف:

$$\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & و & ع \\ ل & م & ن \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ هـ & س & 0 \\ ل & م & ن \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ 0 & ص & 0 \\ ل & م & ن \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د + هـ & و + س + ص & ع \\ ل & م & ن \end{vmatrix}$$

مثال 39

إذا كان ن = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ ، م = $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 4 & 6 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \end{vmatrix}$ فأوجد م بدلالة ن

الحل

نخرج العامل 3 من الصف الأول، و 2 من الصف الثاني، و 5 من الصف الثالث للمحدد م:

$$م = 3 \times 2 \times 5 \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{30\ ن}$$

مثال 40

إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ 1 & 2- & 3 \\ د & و & هـ \end{vmatrix} = 8$ فأوجد قيمة $\begin{vmatrix} 2 & 4- & 6 \\ 2أ & 2ب & 2جـ \\ د & و & هـ \end{vmatrix}$

الحل

نخرج العامل 2 من الصف الأول و 2 من الصف الثاني، ثم نبدّل الصفين الأول والثاني (فتتغير الإشارة):

$$\begin{vmatrix} 2 & 4- & 6 \\ 2أ & 2ب & 2جـ \\ د & و & هـ \end{vmatrix} = 2 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 2- & 3 \\ أ & ب & جـ \\ د & و & هـ \end{vmatrix} = 4 \times (8-) = \boxed{32-}$$

مثال 41

أوجد قيم س ، ص ، ع إذا كان:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2- & 1 \\ 1 & س & 4 \\ 3 & 3- & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 2- & 1 \\ 5 & 9 & 1 \\ 3 & ص & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2- & ع \\ 6 & 6 & 5 \\ 3 & 3- & 6 \end{vmatrix}$$

الحل

لكي يُجمع المحددان في محدد واحد يجب أن يتساوى الصفان الأول والثالث فيهما، ثم يُجمع الصف الثاني:

ص = 3-　　ع = 1　　س + 9 = 6 ∴ س = 3-

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 42

أثبت أن المعادلة $\begin{vmatrix} س & ص & 1 \\ 1- & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ تمثل خطاً مستقيماً يمر بالنقطتين (1 ، 0) و (1- ، 2)

الحل

بالفك عن طريق الصف الأول:

$1(0 - 2) - ص(1- - 1) + س(2 - 0) = 0 \therefore 2س + 2ص - 2 = 0 \therefore س + ص - 1 = 0$

وهي معادلة من الدرجة الأولى، إذن تمثل خطاً مستقيماً ، $ص = 1 - س$

عند س = 1: ص = 0 إذن النقطة (1 ، 0) تقع عليه ✓

عند س = -1: ص = 2 إذن النقطة (1- ، 2) تقع عليه ✓

ملاحظة هامة (محدد حاصل الضرب)

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها فإن: $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$

مثال 43

إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة 2 × 2 وكان $|2س| = 8$ فأوجد $|3س|$

الحل

$|ك س| = ك^{ن} |س|$ حيث ن = 2

$|2س| = 2^2 |س| \therefore 8 = |س| = 2$

$|3س| = 3^2 |س| = 9 \times 2 = \boxed{18}$

تمرين 2

أوجد قيمة س في كل مما يأتي:

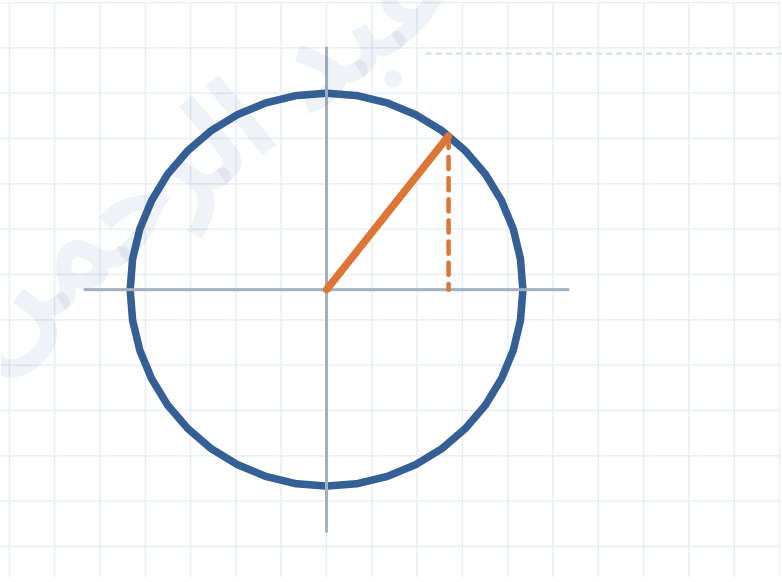
أ) $\begin{vmatrix} 3س & 4- \\ 2 & 2 - س \end{vmatrix} = 1-$ ب) $\begin{vmatrix} 1 + س^2 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 17-$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

الباب الثاني

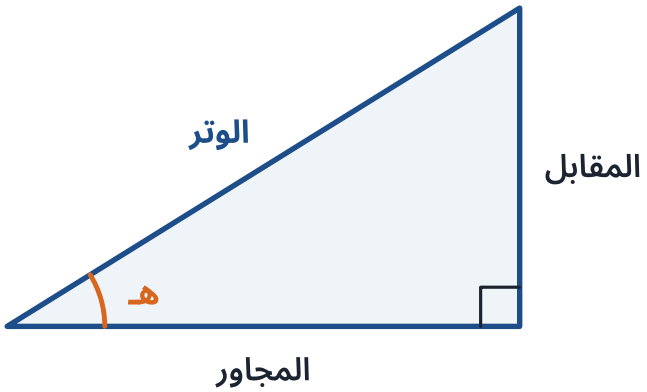
حساب المثلثات

- الزوايا المركبة
- ضعف الزاوية
- المقدار أ جتا θ ± ب جا θ
- حل المعادلات المثلثية
- إثبات المتطابقات المثلثية



الدكتورة سوسن عبد الرحمن

2-1 تذكّر: النسب المثلثية الأساسية



المثلث القائم والنسب المثلثية للزاوية هـ

$$\text{جاهـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \text{قتاهـ} = \frac{1}{\text{جاهـ}}$$

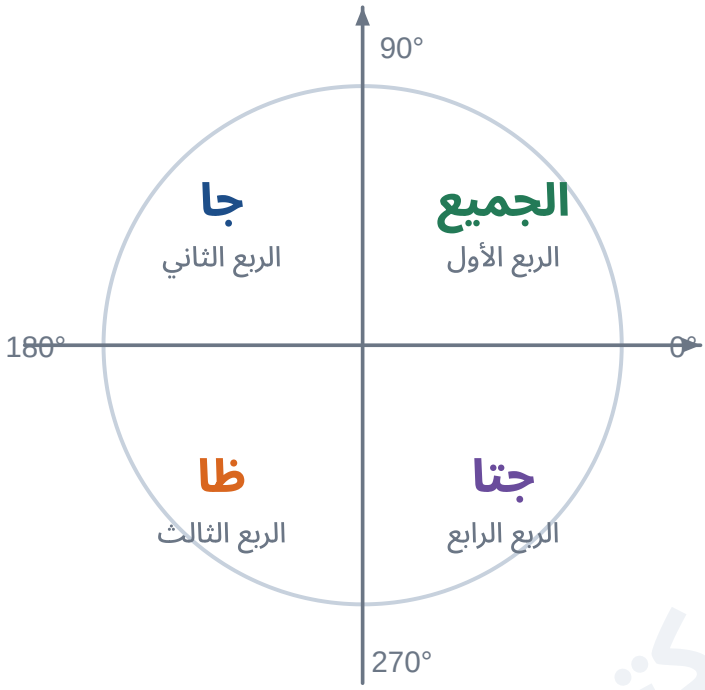
$$\text{جتاهـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \text{قاهـ} = \frac{1}{\text{جتاهـ}}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad \text{ظتاهـ} = \frac{1}{\text{ظاهـ}}$$

ومن نظرية فيثاغورث: $\text{الوتر} = \sqrt{\text{المقابل}^2 + \text{المجاور}^2}$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

إشارات النسب المثلثية في الأرباع الأربعة



النسب الموجبة في كل ربع

الزاوية	الموجب	السالب
θ (الربع الأول)	الجميع	—
180° - θ (الثاني)	جا ، قتا	جتا ، ظا
180° + θ (الثالث)	ظا ، ظتا	جا ، جتا
360° - θ (الرابع)	جتا ، قا	جا ، ظا

الدكتورة نوفين عبد الرحمن

النسب المثلثية للزوايا الخاصة

النسبة	0°	30°	45°	60°	90°
جا	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
جتا	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
ظا	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف

2-2 الزوايا المركبة

تعريف

الزاوية المركبة هي الزاوية الناتجة من جمع زاويتين أو طرحهما، مثل: (أ + ب) ، (أ - ب)

قوانين الزوايا المركبة

جا(أ ± ب) = جاأ جتاب ± جتاأ جاب

جتا(أ ± ب) = جتاأ جتاب ∓ جاأ جاب

$$\text{ظا}(أ \pm ب) = \frac{\text{ظا}أ \pm \text{ظا}ب}{1 \mp \text{ظا}أ \, \text{ظا}ب}$$

مثال 1

أوجد قيمة كل مما يأتي بدون استخدام الآلة الحاسبة: جا 75° ، جتا 105° ، ظا 105°

الحل

جا 75° = جا(45° + 30°) = جا45 جتا30 + جتا45 جا30

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

جتا 105° = جتا(60° + 45°) = جتا60 جتا45 - جا60 جا45

الدكتوره سوسن عبد الرحمن

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\text{ظا}45 + \text{ظا}60}{1 - \text{ظا}45\,\text{ظا}60} = (°45 + °60)\text{ظا} = °105\,\text{ظا}$$

مثال 2

عبّر عن كل مما يأتي في صورة نسبة مثلثية واحدة:

1) $\text{جا}15\,\text{جتا}24 + \text{جتا}15\,\text{جا}24$

2) $\text{جتا}50\,\text{جتا}20 + \text{جا}50\,\text{جا}20$

3) $\dfrac{\text{ظا}20 + 1}{\text{ظا}20 - 1}$

4) $\text{جا}\theta\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{جتا}\theta\,\dfrac{1}{2}$

5) $\dfrac{\text{ظا}\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\text{ظا}\theta\,\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}$

6) $\text{جا}هـ\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \text{جتا}هـ\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

الحل

1) $\text{جا}(°15 + °24) = \text{جا}\,°39$

2) $\text{جتا}(°50 - °20) = \text{جتا}\,°30$

3) $\text{ظا}(°45 + °20) = \dfrac{\text{ظا}45 + \text{ظا}20}{1 - \text{ظا}45\,\text{ظا}20} = \text{ظا}\,°65$

4) $\text{جا}30\,\text{جتا}\theta + \text{جتا}30\,\text{جا}\theta = \text{جا}(\theta + °30)$

5) $\text{ظا}(\theta + °30) = \dfrac{\text{ظا}\theta + \text{ظا}30}{1 - \text{ظا}\theta\,\text{ظا}30}$

6) $\text{جا}هـ\,\text{جتا}45 - \text{جتا}هـ\,\text{جا}45 = \text{جا}(هـ - °45)$

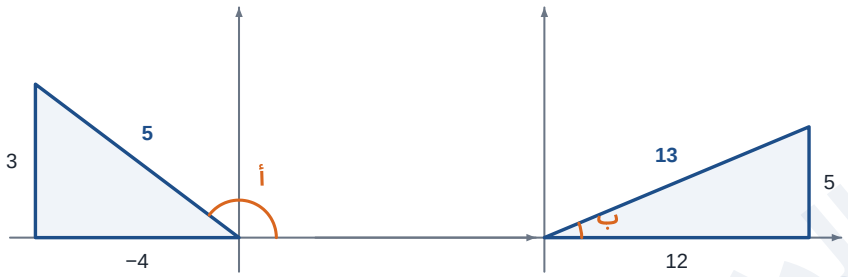
الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 3

إذا كان جتاأ = - $\frac{4}{5}$ ، جتاب = $\frac{12}{13}$ حيث أ زاوية منفرجة و ب زاوية حادة، فأوجد:

جا(أ + ب) ، جا(أ - ب) ، ظا(أ + ب)

الحل



أ في الربع الثاني (الجيب موجب والجيب تمام سالب) ، و ب في الربع الأول

المقابل للزاوية أ: $\sqrt{4^2 - 5^2}$ = 3 ، والمقابل للزاوية ب: $\sqrt{12^2 - 13^2}$ = 5

جاأ = $\frac{3}{5}$ ، جتاأ = - $\frac{4}{5}$ ، ظاأ = - $\frac{3}{4}$ جاب = $\frac{5}{13}$ ، جتاب = $\frac{12}{13}$ ،

ظاب = $\frac{5}{12}$

جا(أ + ب) = جاأ جتاب + جتاأ جاب = $\frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{13}$ = $\frac{20 - 36}{65}$ = $\frac{16}{65}$

جا(أ - ب) = جاأ جتاب - جتاأ جاب = $\frac{36}{65} + \frac{20}{65}$ = $\frac{56}{65}$

ظا(أ + ب) = $\frac{\text{ظاأ} + \text{ظاب}}{1 - \text{ظاأ ظاب}}$ = $\frac{-\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{12}\right)}$ = $\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{63}{48}}$ = - $\frac{16}{63}$

مثال 4

إذا كان $\frac{\text{ظاأ + ظاب}}{1 - \text{ظاأ ظاب}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$ فأوجد قيمة (أ + ب) حيث أ + ب زاوية حادة.

الحل

$\text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{3}{\sqrt{3}}$ ∴ $\sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{3}}$ ∴ **أ + ب = 60°**

مثال 5

إذا كان ظا(أ + ب) = 2 ، ظاأ = $\frac{1}{4}$ فأوجد ظاب

الحل

$\frac{\text{ظاب} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}\text{ظاب}} = 2$ ∴ ظاب + $\frac{1}{4}$ = 2 - ظاب $\frac{1}{2}$ ∴ ظاب $\frac{3}{2} = \frac{7}{4}$

∴ **ظاب = $\frac{7}{6}$**

مثال 6

اكتب في صورة نسبة مثلثية واحدة: جا(س + ص) جتاص - جتا(س + ص) جاص

الحل

المقدار على صورة جاأ جتاب - جتاأ جاب = جا(أ - ب) ، حيث أ = س + ص ، ب = ص

= جا(س + ص - ص) = **جاس**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 7

إذا كانت أ ، ب ، جـ زوايا مثلث، فأثبت أن: جا(أ + ب) = جاجـ

الحل

أ + ب + جـ = 180° ∴ أ + ب = 180° - جـ

جا(أ + ب) = جا(180° - جـ) = جا180 جتاجـ - جتا180 جاجـ = 0 - (-1) جاجـ = جاجـ

تمرين 1

أوجد جا(90° + أ) بدلالة نسبة مثلثية للزاوية أ

2-3 ضعف الزاوية

بوضع ب = أ في قوانين الزوايا المركبة نحصل على:

جا2أ = جا(أ + أ) = جاأ جتاأ + جتاأ جاأ = 2 جاأ جتاأ

جتا2أ = جتا(أ + أ) = جتا²أ - جا²أ

وباستخدام جا²أ + جتا²أ = 1 يمكن كتابة جتا2أ بصورتين أخريين:

جتا2أ = جتا²أ - (1 - جتا²أ) = 2جتا²أ - 1 ، جتا2أ = (1 - جا²أ) - جا²أ = 1 - 2جا²أ

قوانين ضعف الزاوية

جا2أ = 2 جاأ جتاأ

$$\text{ظا}2أ = \frac{2\ \text{ظا}أ}{1 - \text{ظا}^2أ}$$

جتا2أ = جتا²أ - جا²أ

= 2جتا²أ - 1

= 1 - 2جا²أ

وللزاوية الثلاثية: جا3θ = 3جاθ - 4جا³θ ، جتا3θ = 4جتا³θ - 3جتاθ

مثال 8

اختصر كلاً مما يأتي:

1) جتا^2 18 - جا^2 18

2) 2 جتا^2 2س - 1

3) $\frac{1 - \text{ظا}^2 10}{2 \text{ ظا}10}$

4) جاس جتاس

5) 10 جاس جتاس

6) 2 جا $\frac{\text{س}}{2}$ جتا $\frac{\text{س}}{2}$

الحل

1) جتا 2(18°) = جتا 36°

2) جتا 2(2س) = جتا 4س

3) $\frac{1}{\text{ظا } 20}$ = ظتا 20°

4) $\frac{1}{2}$ جا 2س

5) 5 جا 2س

6) جاس

مثال 9

إذا كان جتاθ = جـ حيث θ زاوية حادة، فأوجد بدلالة جـ: أ) ظا^{2}θ ب) جا2θ

الحل

جاθ = $\sqrt{1 - \text{جـ}^2}$ ، ظاθ = $\frac{\sqrt{1 - \text{جـ}^2}}{\text{جـ}}$

أ) ظا^{2}θ = $\frac{1 - \text{جـ}^2}{\text{جـ}^2}$

ب) جا2θ = 2 جاθ جتاθ = 2 جـ $\sqrt{1 - \text{جـ}^2}$

مثال 10

إذا علمت أن جاس جتاص = ق ، جتاس جاص = ط ، فأوجد بدلالة ق ، ط كلاً من:

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

أ) جا(س + ص) جا(س - ص)　　ب) $\frac{\text{ظاس}}{\text{ظاص}}$　　جـ) جا2س جا2ص

الحل

أ) (جاس جتاص + جتاس جاص)(جاس جتاص - جتاس جاص) = (ق + ط)(ق - ط) =

$ق^2 - ط^2$

ب) $\frac{\text{ظاس}}{\text{ظاص}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جتاص}}{\text{جاص}} = \frac{\text{جاس جتاص}}{\text{جتاس جاص}} =$ **$\frac{ق}{ط}$**

جـ)

جا2س جا2ص = (2 جاس جتاس)(2 جاص جتاص) = 4 (جاس جتاص)(جتاس جاص) =

4 ق ط

مثال 11

إذا كان ظتاθ = $\frac{1}{\text{س}}$ ، جتا2θ = ص حيث θ زاوية حادة، فأوجد ص بدلالة س ، ثم أوجد قاθ2

الحل

ظاθ = س = $\frac{\text{س}}{1}$ ، إذن المقابل = س ، المجاور = 1 ، الوتر = $\sqrt{\text{س}^2 + 1}$

جاθ = $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}$ ، جتاθ = $\frac{1}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}$

ص = جتا^{2}θ - جا^{2}θ = $\frac{1}{\text{س}^2 + 1} - \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 + 1} =$ **$\frac{1 - \text{س}^2}{1 + \text{س}^2}$**

قاθ2 = $\frac{1}{\text{جتا}2\theta} =$ **$\frac{1 + \text{س}^2}{1 - \text{س}^2}$**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

2-4 المقدار أ جتا θ ± ب جا θ

تمهيد: لنفك المقدار 2 جتا(θ - 60°):

2 جتا(θ - 60°) = 2 [جتاθ جتا60 + جاθ جا60]

$$= 2\left[\text{جتا}\theta \times \frac{1}{2} + \text{جا}\theta \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \text{جتا}\theta + \sqrt{3}\,\text{جا}\theta$$

إذن العكس صحيح: يمكن كتابة المقدار جتاθ + $\sqrt{3}$ جاθ على صورة نسبة مثلثية واحدة.

قاعدة

أ جتاθ + ب جاθ = ر جتا(θ - α)

أ جتاθ - ب جاθ = ر جتا(θ + α)

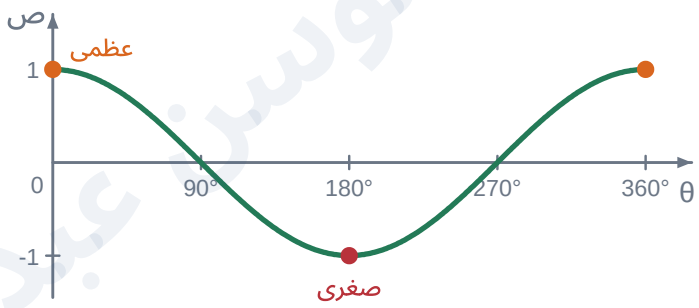
أ جاθ ± ب جتاθ = ر جا(θ ± α)

حيث: ر = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ (سعة الدالة)

و: ظاα = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

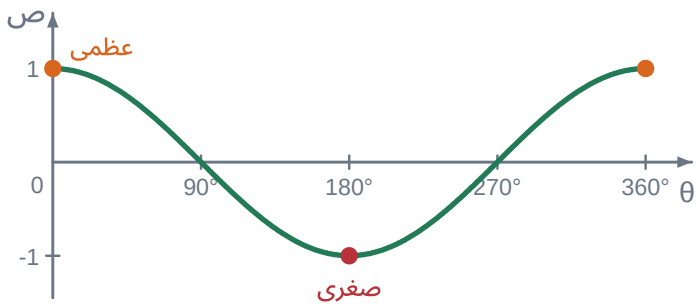
القيمة العظمى للمقدار = +ر

القيمة الصغرى للمقدار = -ر



جتا: عظمى عند 0° وصغرى عند 180°

الدكتورة سوسن عبد الرحمن



جتا: عظمى عند 0° وصغرى عند 180°

مثال 12

ضع المقدار $\sqrt{3}$ جتاθ + جاθ في صورة ر جتا(θ - α) ، ثم أوجد القيمتين العظمى والصغرى للمقدار وقيم θ المناظرة لهما حيث $0° \leq \theta < 360°$

الحل

$أ = \sqrt{3}$ ، $ب = 1$ $\quad ر = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$ظا\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore \alpha = 30°$

$\therefore \sqrt{3}$ جتاθ + جاθ = 2جتا(θ - 30°)

القيمة العظمى = 2 عندما:

$\theta - 30° = 0°$ $\therefore$ **θ = 30°**

القيمة الصغرى = −2 عندما:

$\theta - 30° = 180°$ $\therefore$ **θ = 210°**

مثال 13

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لكل مما يأتي، مع ذكر قيم θ المناظرة حيث $0° \leq \theta < 360°$:

أ) 3 جاθ + 4 جتاθ $\quad$ ب) $(\text{جتا}\theta + 3\text{جا}\theta)^2$ $\quad$ جـ) جتا(θ + 60°) + جتاθ

الحل

أ) $ر = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ، $ظا\alpha = \frac{3}{4}$ $\therefore \alpha \approx 53.13°$

3 جاθ + 4 جتاθ = 5جا(θ + 53.13°)

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

العظمى = 5 عندما $\theta + 53.13 = 90$ الصغرى = −5 عندما $\theta + 53.13 = 270$

$\therefore \theta = 36.87°$ $\therefore \theta = 216.87°$

ب) $ر = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ ، $ظا\alpha = 3 \therefore \alpha \approx 71.57°$

$(جتا3 + \theta\ جا\theta)10 = \left[(\theta - 71.57°)جتا\sqrt{10}\right]^2 = (\theta - 71.57°)^2جتا^2$

لأن المقدار مربع فإن: **العظمى = 10** عندما $جتا(\theta - 71.57) = \pm 1$ أي $\theta = 71.57°$ أو $251.57°$

و **الصفرى = 0** عندما $جتا(\theta - 71.57) = 0$ أي $\theta = 161.57°$ أو $341.57°$

جـ) $جتا\theta\ جتا60 - جا\theta\ جا60 + جتا\theta = \frac{3}{2}جتا\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}جا\theta$

$ر = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$ ، $ظا\alpha = 30° \therefore \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2/\sqrt{3}}{3/2} = \alpha$

$\therefore$ المقدار $= \sqrt{3}\ جتا(\theta + 30°)$

العظمى $= \sqrt{3}$ عندما $\theta + 30 = 360$ الصغرى $= -\sqrt{3}$ عندما $\theta + 30 = 180$

$\therefore \theta = 330°$ $\therefore \theta = 150°$

2-5 حل المعادلات المثلثية

خطوات عامة

1. نختصر المعادلة إلى نسبة مثلثية واحدة تساوي عدداً.
2. نوجد الزاوية الأساسية (الحادة) بالآلة الحاسبة باستخدام SHIFT.
3. نحدد الأرباع التي تحقق إشارة النسبة، ونكتب جميع الحلول داخل الفترة المطلوبة.

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 14

حل المعادلة 3 جتا4 θ + جا1 θ = 0 حيث $0° < \theta < 360°$

الحل

$$\text{ر} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ ، ظا} \alpha = \frac{4}{3} \therefore \alpha \approx 53.13°$$

$$5 \text{ جتا}(\theta - 53.13°) = 1 \therefore \text{جتا}(\theta - 53.13°) = \frac{1}{5} = 0.2$$

الزاوية الأساسية: جتا$^{-1}$(0.2) ≈ 78.46° ، والجتا موجب في الربعين الأول والرابع:

$\theta - 53.13 = 78.46$ $\qquad$ $\theta - 53.13 = 360 - 78.46 = 281.54$

$\therefore$ **$\theta \approx 131.59°$** $\qquad$ $\therefore$ **$\theta \approx 334.67°$**

مثال 15

حل المعادلتين الآتيتين حيث $0° \leq$ س $< 360°$:

أ) 6 جاس جتاس = 1 $\qquad$ ب) $\frac{1}{2}$ جاس = جا2س

الحل

أ) 3 × 2 جاس جتاس = 1 $\therefore$ 3 جا2س = 1 $\therefore$ جا2س = $\frac{1}{3}$

الزاوية الأساسية ≈ 19.47° ، والجا موجب في الربعين الأول والثاني. وبما أن $0 \leq$ س < 360 فإن $0 \leq$ 2س < 720 :

2س = 19.47 ، 160.53 ، 379.47 ، 520.53

$\therefore$ **س ≈ 9.74° ، 80.26° ، 189.74° ، 260.26°**

ب) $\frac{1}{2}$ جاس - 2 جاس جتاس = 0 $\therefore$ جاس $\left[\frac{1}{2} - 2 \text{ جتاس}\right]$ = 0

الدكتور يوسف عبد الرحمن

إما جاس = 0 أو جتاس = $\frac{1}{4}$

∴ س = 0° أو 180°

∴ س ≈ 75.52° أو 360 - 75.52 = 284.48°

مثال 16

حل المعادلة ظا2س = 3 ظاس حيث 0° ≤ س < 360°

الحل

$\frac{2 \text{ ظاس}}{1 - \text{ظا}^2\text{س}}$ = 3 ظاس ∴ 2 ظاس = 3 ظاس - 3 ظا^{3}س

∴ 3 ظا^{3}س - ظاس = 0 ∴ ظاس (3 ظا^{2}س - 1) = 0

ظاس = 0 ∴ س = 0° ، 180°

ظا^{2}س = $\frac{1}{3}$ ∴ ظاس = ± $\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ س = 30° ، 150° ، 210° ، 330°

مثال 17

حل المعادلة جا(2س + 15°) = 0.8 حيث 0° ≤ س < 360°

الحل

الزاوية الأساسية: جا$^{-1}$(0.8) ≈ 53.13° ، والجا موجب في الربعين الأول والثاني:

2س + 15 = 53.13 أو 413.13 2س + 15 = 126.87 أو 486.87

∴ س ≈ 19.07° أو 199.07° ∴ س ≈ 55.94° أو 235.94°

2-6 إثبات المتطابقات المثلثية

طريقة الإثبات

نبدأ بالطرف الأكثر تعقيداً، ونستخدم القوانين حتى نصل إلى الطرف الآخر.

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 18

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

1) جتا(90° + أ) = -جاأ

2) $\frac{\text{1 - جتا2θ}}{\text{1 + جتا2θ}} = \text{ظا}^2\theta$

3) $\frac{\text{1 + جا2س + جتا2س}}{\text{جاس + جتاس}} = 2 \text{ جتاس}$

الحل

1) جتا90 جتاأ - جا90 جاأ = 0 × جتاأ - 1 × جاأ = -جاأ ✓

2) الطرف الأيمن = $\frac{(\text{1 - (جا2θ}^2)}{(\text{1 + (جتا2θ - θ}^2)} = \frac{\text{2 جا}^2\theta}{\text{2 جتا}^2\theta} = \text{ظا}^2\theta$ ✓

3) الطرف الأيمن

$= \frac{\text{1 + 2 جاس جتاس + 2 جتا}^2\text{س - 1}}{\text{جاس + جتاس}} = \frac{\text{2 جتاس (جاس + جتاس)}}{\text{جاس + جتاس}} = 2 \text{ جتاس}$ ✓

مثال 19

إذا كان أ = ب + جـ فأثبت أن: ظاأ - ظاب - ظاجـ = ظاأ ظاب ظاجـ

الحل

ظاأ = ظا(ب + جـ) = $\frac{\text{ظاب + ظاجـ}}{\text{1 - ظاب ظاجـ}}$

ظاأ - ظاأ ظاب ظاجـ = ظاب + ظاجـ ∴ ظاأ - ظاب - ظاجـ = ظاأ ظاب ظاجـ ✓

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 20

أثبت أن: 1) $\text{ظتا}\theta + \text{قتا}2\theta = \text{ظتا}\theta$ 2) $\text{جتا}2أ = \frac{1 - \text{ظا}^2أ}{1 + \text{ظا}^2أ}$

الحل

1) الطرف الأيمن

$$= \frac{1}{2\text{جا}\theta} + \frac{2\text{جتا}\theta}{2\text{جا}\theta} = \frac{1 + 2\text{جتا}\theta}{2\text{جا}\theta} = \frac{2\text{جتا}^2\theta}{2\text{جا}\theta\ \text{جتا}\theta} = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} = \text{ظتا}\theta \quad ✓$$

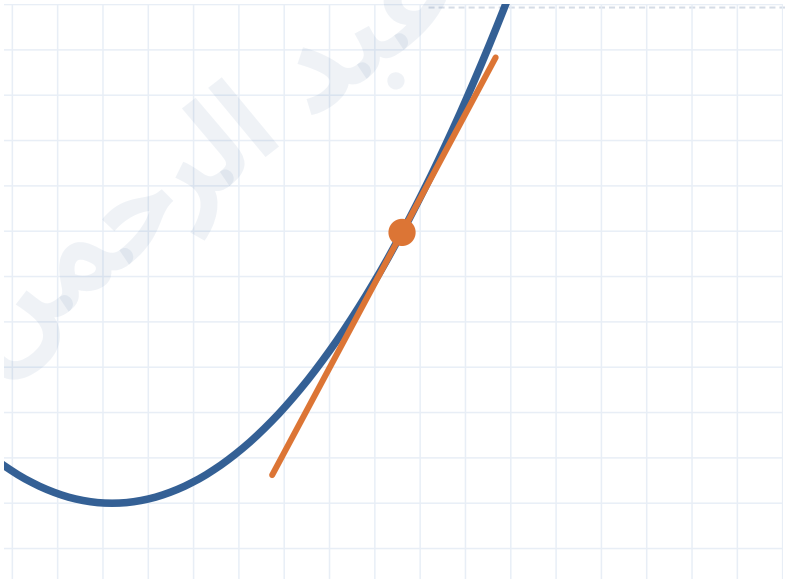
2) الطرف الأيسر $= \frac{\frac{\text{جا}^2أ}{\text{جتا}^2أ} - 1}{\frac{\text{جا}^2أ}{\text{جتا}^2أ} + 1} = \frac{\text{جتا}^2أ - \text{جا}^2أ}{\text{جتا}^2أ + \text{جا}^2أ} = \frac{\text{جتا}2أ}{1} = \text{جتا}2أ$ ✓

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

الباب الثالث

التفاضل

- قواعد التفاضل والمشتقة الثانية
- مشتقة حاصل ضرب وخارج قسمة دالتين
- التفاضل الضمني
- ميل المنحنى ومعادلتا المماس والعمودي



د.كيرلس سيوس عبد الرحمن

3-1 مفهوم المشتقة وقواعد التفاضل

تعريف

إذا كانت ص = د(س) دالة متصلة وقابلة للاشتقاق، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ تُسمى: المشتقة الأولى ، أو معامل التفاضل الأول ، أو معدل تغير ص بالنسبة إلى س. ويُرمز لها أيضاً بالرمز صَ أو دَ(س)

قواعد التفاضل الأساسية

1) ص = أ $س^{ن}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ن أ $س^{ن-1}$

2) ص = أ (عدد ثابت) ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = 0

3) ص = $\sqrt{د(س)}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{دَ(س)}{2\sqrt{د(س)}}$

4) ص = $(د(س))^{ن}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ن $(د(س))^{ن-1}$ × دَ(س)

في القاعدة 4 نضرب دائماً في **تفاضل ما بداخل القوس**.

مثال 1

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يأتي:

1) ص = $5س^{4} - 3س^{2} + 7$

2) ص = $\sqrt{س^{2} + 1}$

3) ص = $(3 - 2س)^{5}$

الحل

1) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $20 س^{3} - 6$ س

2) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2س}{2\sqrt{س^{2} + 1}} = \frac{س}{\sqrt{س^{2} + 1}}$

الدكتورة شروق عبد الرحمن

3) $\frac{د ص}{د س} = 5(3 - 2س)^4 \times 2 = 10(3 - 2س)^4$

• المشتقة الثانية

تعريف

المشتقة الثانية هي تفاضل المشتقة الأولى، ويُرمز لها بالرمز $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ أو صً

مثال 2

إذا كانت ص = $2س^3$ فأوجد صَ ، صً

الحل

صَ = $6 س^2$ صً = $12 س$

3-2 مشتقة حاصل ضرب دالتين

قاعدة

تفاضل حاصل ضرب دالتين = الأولى × تفاضل الثانية + الثانية × تفاضل الأولى

$\frac{د}{د س}(ع \times ل) = ع \times لَ + ل \times عَ$

مثال 3

إذا كانت ص = $س^3 (س + 1)$ فأوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = س^3 \times 1 + (س + 1) \times 3س^2 = 4س^3 + 3س^2 =$ **$س^2 (4س + 3)$**

الدكتورة ياسمين عبد الرحمن

مثال 4

أوجد $\frac{دص}{دس}$ حيث ص = $س^3 (س + 1)^4$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = س^3 \times 4(س + 1)^3 + (س + 1)^4 \times 3س^2$$

بأخذ $س^2 (س + 1)^3$ عاملاً مشتركاً: = $س^2 (س + 1)^3$ [4س + 3(س + 1)] =

$س^2 (س + 1)^3 (7س + 3)$

مثال 5

أوجد $\frac{دص}{دس}$ حيث ص = $\sqrt{س}\,(3س^2 + 1)^2$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = \sqrt{س} \times 2(3س^2 + 1)(6س) + (3س^2 + 1)^2 \times \frac{1}{2\sqrt{س}}$$

$$= (3س^2 + 1)\left[12\,س\sqrt{س} + \frac{3س^2 + 1}{2\sqrt{س}}\right] = (3س^2 + 1) \times \frac{24س^2 + 3س^2 + 1}{2\sqrt{س}} =$$

$\frac{(3س^2 + 1)(27س^2 + 1)}{2\sqrt{س}}$

3-3 مشتقة خارج قسمة دالتين

قاعدة

$$\frac{د}{دس}\left(\frac{البسط}{المقام}\right) = \frac{المقام \times تفاضل\ البسط - البسط \times تفاضل\ المقام}{(المقام)^2}$$

مثال 6

إذا كانت ص = $\frac{1 + س}{1 - س2}$ فأوجد صَ

الحل

صَ = $\frac{(2)(1 + س) - (1)(1 - س2)}{2(1 - س2)}$ = $\frac{2 - س2 - 1 - س2}{2(1 - س2)}$ = $\frac{-3}{2(1 - س2)}$

مثال 7

إذا كانت ص = $\frac{\sqrt{س}}{1 + س2}$ فأوجد صَ

الحل

صَ = $\frac{2 \times \sqrt{س} - \frac{1}{\sqrt{س}2} \times (1 + س2)}{2(1 + س2)}$

بضرب البسط والمقام في 2 $\sqrt{س}$: صَ = $\frac{1 + س2 - 4س}{2(1 + س2)\sqrt{س}2}$ = $\frac{1 - س2}{2(1 + س2)\sqrt{س}2}$

3-4 التفاضل الضمني

الدالة الضمنية

هي الدالة التي لا يكون فيها ص معزولاً في طرف، بل تختلط حدودها بين س و ص مثل $س^2$ + س ص + $ص^2$ = 4. ولإيجاد صَ نفاضل الطرفين بالنسبة إلى س ، مع ضرب تفاضل أي حد يحتوي على ص في صَ

مثال 8

أوجد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي:

1) $س^2 - ص^2 = 2$

2) $س^2 ص - 2 = 0$

3) $س^2 + ص^2 + 2 س ص - 1 = 0$

4) $\sqrt{س} - \sqrt{ص} = 1$

5) $\frac{1}{س} - \frac{1}{ص} = 1$

الحل

1) $2س - 2ص \times ص = 0 \therefore$ **$ص = \frac{س}{ص}$**

2) $س^2 \times ص + ص \times 2س = 0 \therefore ص = \frac{-2 س ص}{س^2} \therefore$ **$ص = \frac{-2ص}{س}$**

3) $2س + 2ص ص + 2س ص + 2ص = 0 \therefore ص (2ص + 2س) = -2(س + ص) \therefore$ **$ص = -1$**

4) $\frac{1}{2\sqrt{س}} - \frac{1}{2\sqrt{ص}} = 0 \therefore ص =$ **$ص = \frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} = \sqrt{\frac{ص}{س}}$**

5) $\frac{1}{س^2} + \frac{1}{ص^2} = 0 \therefore ص =$ **$ص = \frac{ص^2}{س^2}$**

مثال 9

إذا كان $س^2 - ص^2 + 10س - 5ص + 19 = 0$ فأوجد $ص$ عند النقط التي يكون عندها $ص = 0$

الحل

بالتفاضل: $2س - 2ص ص + 10 - 5ص = 0 \therefore ص = \frac{2س + 10}{2ص + 5}$

$ص = 0 \therefore 2س + 10 = 0 \therefore س = -5$ ، وبالتعويض في المعادلة الأصلية:

$ص^2 - 25 - 5ص + 50 + 19 = 0 \therefore ص^2 + 5ص + 6 = 0$

$\therefore (ص + 2)(ص + 3) = 0 \therefore ص = -2$ أو $ص = -3$

الدكتورة: روسن عبد الرحمن

بتفاضل صَ (قاعدة القسمة): صً = $\frac{(\text{صَ}2)(10 + \text{س}2) - (2)(5 + \text{ص}2)}{(5 + \text{ص}2)^2}$ ، وعند

صَ = 0 : صً = $\frac{2}{5 + \text{ص}2}$

عند النقطة (-5 ، -2): **صً = 2**

عند النقطة (-5 ، -3): **صً = -2**

مثال 10

إذا كان س ص = 1 حيث س ≠ 0 ، فأوجد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} \times \frac{\text{د}^2\text{س}}{\text{د ص}^2}$

الحل

ص = $\frac{1}{\text{س}}$ = س^{-1} ، س = $\frac{1}{\text{ص}}$ = ص^{-1}

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{س}^{-2}$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ص}} = -\text{ص}^{-2}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} = 2\,\text{س}^{-3} = \frac{2}{\text{س}^3}$ ، $\frac{\text{د}^2\text{س}}{\text{د ص}^2} = \frac{2}{\text{ص}^3}$

∴ حاصل الضرب = $\frac{2}{\text{س}^3} \times \frac{2}{\text{ص}^3} = \frac{4}{(\text{س ص})^3} = \frac{4}{1} =$ **4**

مثال 11

إذا كانت صم = (1 + س)ن فأثبت أن: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}$ ص

الحل

بالتفاضل الضمني: م صم - 1 × صَ = ن (1 + س)ن - 1

بضرب الطرفين في (1 + س): م صم - 1 (1 + س) صَ = ن (1 + س)ن = ن صم

بالقسمة على م صم - 1: (1 + س) صَ = $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ ص ✓

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 12

إذا كانت د(س) = (س^{2} - 3س + 1)^{2} فأوجد دَ(-1)

الحل

دَ(س) = 2 (س^{2} - 3س + 1)(2س - 3)

دَ(-1) = 2 (1 + 3 + 1)(-2 - 3) = 2 × 5 × (-5) = **-50**

مثال 13

إذا كان $\frac{د^{2}}{دس^{2}}$ $\left(\frac{س + 1}{س}\right)$ = $\frac{ك}{س^{3}}$ فما قيمة ك؟

الحل

$\frac{س + 1}{س}$ = 1 + س$^{-1}$ ∴ المشتقة الأولى = -س$^{-2}$ ، المشتقة الثانية = 2 س$^{-3}$ = $\frac{2}{س^{3}}$

∴ **ك = 2**

مثال 14

إذا كان ص = س^{3} + $\int$ (6س^{2} + 4) دس فأوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

التفاضل والتكامل عمليتان عكسيتان، إذن تفاضل التكامل يعيد الدالة نفسها:

$\frac{دص}{دس}$ = 3س^{2} + 6س^{2} + 4 = **9 س^{2} + 4**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 15

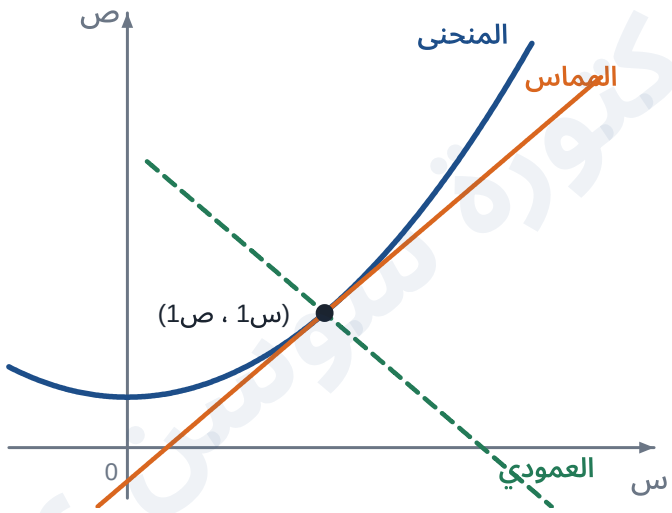
إذا كان $\frac{د}{دس}$ [(س^2 - 9)(س^2 + 9)] = ك س^3 فما قيمة ك؟

الحل

بالضرب (فرق بين مربعين): (س^2 - 9)(س^2 + 9) = س^4 - 81

$\frac{د}{دس}$ (س^4 - 81) = 4 س^3 ∴ **ك = 4**

3-5 ميل المنحنى ومعادلتا المماس والعمودي



المماس والعمودي عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$)

قاعدة

- ميل المنحنى عند نقطة = ميل المماس عند تلك النقطة = $\frac{دص}{دس}$
- معادلة المماس: ص - ص$_1$ = م (س - س$_1$)
- ميل العمودي = - $\frac{1}{م}$ ، ومعادلته: ص - ص$_1$ = - $\frac{1}{م}$ (س - س$_1$)

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

ملاحظات

- المماس يوازي محور السينات ∴ م = 0
- المماس يوازي محور الصادات ∴ الميل غير معرّف
- المستقيمات المتوازية متساوية الميل: $م_1 = م_2$
- المستقيمان المتعامدان: $م_1 \times م_2 = -1$
- ميل المستقيم المار بنقطتين = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$
- في المعادلة ص = م س + جـ يكون م (معامل س) هو الميل.
- عند نقطة التقاطع مع محور السينات ص = 0 ، ومع محور الصادات س = 0
- لإيجاد ص نعوّض بقيمة س في **معادلة المنحنى الأصلية**.

مثال 16

أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى ص = $4س^2 + 2س - 1$ عند النقطة التي إحداثيها السيني س = $\frac{1}{2}$

الحل

خطوات العمل: النقطة ← التفاضل ← الميل ← المعادلة.

النقطة: ص = $4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1$ إذن النقطة $(\frac{1}{2}، 1)$

الميل: صَ = 8س + 2 ∴ م = $8\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 6$

معادلة المماس: ص - 1 = 6 $\left(س - \frac{1}{2}\right)$ ∴ **ص = 6س - 2**

معادلة العمودي: ص - 1 = $-\frac{1}{6}\left(س - \frac{1}{2}\right)$ ، وبالضرب في 12:

12ص - 12 = -2س + 1 ∴ **2س + 12ص - 13 = 0**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 17

المنحنى ص = س^2 - 3س + 3 ميله -1 عند نقطة عليه، أوجد إحداثيي هذه النقطة.

الحل

ص = 2س - 3 = -1 ∴ س = 1 ، وبالتعويض في المعادلة الأصلية: ص = 1 - 3 + 3 = 1

∴ النقطة **(1 ، 1)**

مثال 18

إذا كان ص = 4س + $\frac{1}{س}$ فأوجد إحداثيات النقط التي يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات.

الحل

المماس يوازي محور السينات ∴ م = 0

ص = 4 - $\frac{1}{س^2}$ ∴ 0 = س^2 = $\frac{1}{4}$ ∴ س = ± $\frac{1}{2}$

س = $\frac{1}{2}$ ∴ ص = 2 + 2 = 4

النقطة **($\frac{1}{2}$ ، 4)**

س = - $\frac{1}{2}$ ∴ ص = -2 - 2 = -4

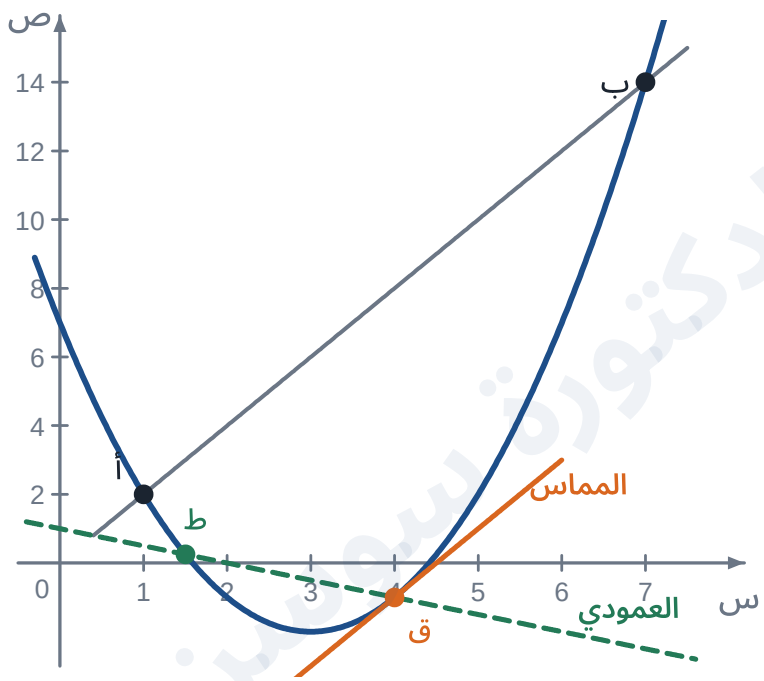
النقطة **(- $\frac{1}{2}$ ، -4)**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 19 — مثال مهم

النقطتان أ(1 ، 2) ، ب(7 ، 14) تقعان على المنحنى ص = س^2 - 6س + 7 ، والنقطة ق تقع على المنحنى بحيث يكون المماس عندها موازياً للمستقيم أب. أوجد: أ) إحداثيي النقطة ق. ب) معادلة العمودي عند ق. جـ) إحداثيي النقطة ط التي يقطع فيها هذا العمودي المنحنى مرة أخرى.

الحل



المماس عند ق يوازي الوتر أب ، والعمودي عند ق يقطع المنحنى مرة أخرى في ط

أ) ميل أب = $\frac{14 - 2}{7 - 1}$ = 2 ، و صَ = 2س - 6

∴ 2س - 6 = 2 ∴ س = 4 ∴ ص = 16 - 24 + 7 = -1 ∴ **ق(4 ، -1)**

ب) ميل العمودي = $-\frac{1}{2}$: ص + 1 = $-\frac{1}{2}$ (س - 4) ∴ **ص = $-\frac{1}{2}$ س + 1**

جـ) بحل المعادلتين معاً: س^2 - 6س + 7 = $-\frac{1}{2}$ س + 1

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

∴ $2س^2 - 11س + 12 = 0$ ∴ $(2س - 3)(س - 4) = 0$ ∴ $س = \frac{3}{2}$ (لأن س = 4 هي النقطة ق)

ص = $-\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{4}$ ∴ **ط$(\frac{3}{2}، \frac{1}{4})$**

مثال 20

إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه هو 6س ، وكان المنحنى يمر بالنقطة (1 ، 4) ، فأوجد معادلة المنحنى.

الحل

$\frac{دص}{دس} = 6س$ ، وبتكامل الطرفين: ص = $\int 6س \, دس = 3س^2 + ث$

لإيجاد الثابت نعوّض بالنقطة (1 ، 4): $4 = 3 + ث$ ∴ $ث = 1$

∴ معادلة المنحنى: **$ص = 3س^2 + 1$**

مثال 21

إذا كان $(ص + 1)^3 = (س - 2)^2$ فأوجد $\left[\frac{3}{2} صَ\right]^2$

الحل

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين: $ص + 1 = (س - 2)^{\frac{2}{3}}$

$صَ = \frac{2}{3}(س - 2)^{-\frac{1}{3}}$ ∴ $صَ = \frac{3}{2}(س - 2)^{-\frac{1}{3}}$

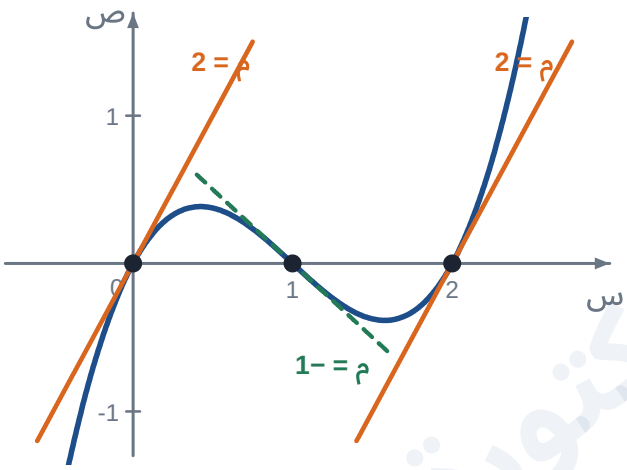
∴ $\left[\frac{3}{2} صَ\right]^2 = (س - 2)^{-\frac{2}{3}} =$ **$\frac{1}{\sqrt[3]{(س - 2)^2}}$**

الدكتور سوسن عبد الرحمن

مثال 22 — مثال مهم

المنحنى ص = س(س - 1)(س - 2) يقطع محور السينات في ثلاث نقط. أوجد إحداثياتها، وأثبت أن الميل عند نقطتين منها متساوٍ، ثم أوجد معادلة المماس عند النقطة التي س = 0

الحل



المماسان عند س = 0 و س = 2 متوازيان (الميل = 2)

عند التقاطع مع محور السينات ص = 0:

س(س - 1)(س - 2) = 0

∴ النقط: (0 ، 0) ، (0 ، 1) ، (0 ، 2)

ص = $س^3$ - 3$س^2$ + 2س ∴ صَ = 3$س^2$ - 6س + 2

عند س = 0: م = 2

عند س = 1: م = 3 - 6 + 2 = -1

عند س = 2: م = 12 - 12 + 2 = 2

إذن الميل متساوٍ عند النقطتين (0 ، 0) و (2 ، 0) ✓

∴ معادلة المماس عند (0 ، 0): ص - 0 = 2(س - 0) **ص = 2س**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 23

أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى د(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - 4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (2 ، -1)

الحل

دَ(س) = $\frac{(\text{س} - 4)(1) - \text{س}(1)}{(\text{س} - 4)^2}$ = $\frac{-4}{(\text{س} - 4)^2}$ ، وعند س = 2: م = $\frac{-4}{4}$ = -1

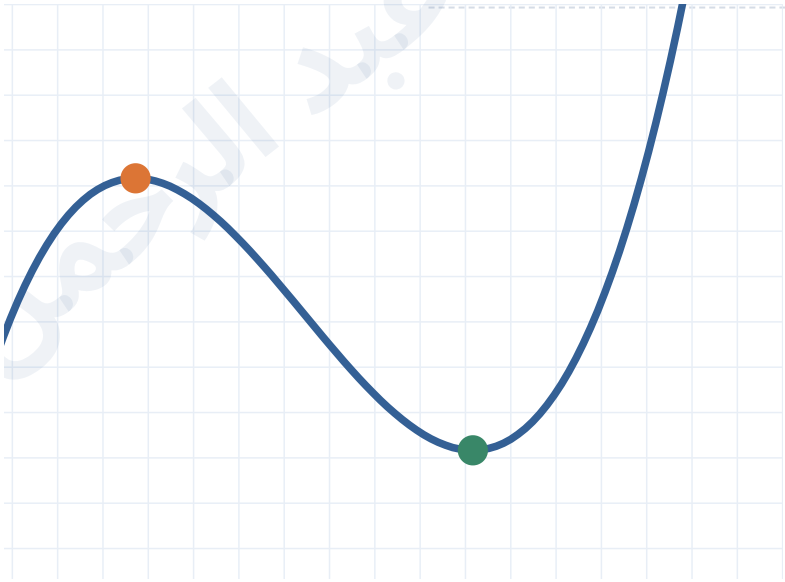
ظاθ = -1 ، والزاوية في الربع الثاني: θ = 180° - 45° = **135°**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

الباب الرابع

تطبيقات التفاضل

- المعدلات الزمنية المرتبطة
- النقط الحرجة (القيم العظمى والصغرى)
- نقط الانقلاب والتقعر
- السرعة والعجلة



د. كيرلس سمير سيوس عبد الرحمن

4-1 معدل التغير

تعريف

معدل تغير ص بالنسبة إلى س هو $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$. وعندما تتغير الكميات بمرور الزمن ن نتحدث عن **المعدلات الزمنية**.

عند نفخ بالون كروي فإن نصف قطره يزداد بمعدل ما، وتزداد مساحة سطحه بمعدل آخر، وكذلك حجمه، وهذه المعدلات مرتبطة ببعضها:

معدل تغير نصف القطر: $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ معدل تغير المساحة: $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ معدل تغير الحجم: $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$

قاعدة السلسلة

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\text{دح}}{\text{دنق}} \times \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

- إذا كانت الكمية **تتزايد** فإن معدل تغيرها **موجب** (+).
- إذا كانت الكمية **تتناقص** فإن معدل تغيرها **سالب** (−).

قوانين هندسية مفيدة

- حجم الكرة: ح = $\frac{4}{3}$ π نق^3 ، مساحة سطحها: م = 4π نق^2
- مساحة الدائرة: م = π نق^2
- حجم المكعب: ح = ل^3
- حجم المخروط: ح = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

الدكتورة سهوسن عبد الرحمن

مثال 1

يزداد طول نصف قطر بالون كروي بمعدل 1 سم/ث. أوجد معدل تغير: أ) حجمه ب) مساحة سطحه، عندما يكون نق = 5 سم

الحل

أ) $ح = \frac{4}{3}\pi نق^3 \therefore \frac{دح}{دنق} = 4\pi نق^2$

$$\frac{دح}{دن} = \frac{دح}{دنق} \times \frac{دنق}{دن} = 4\pi (5)^2 \times 1 = \boxed{100\pi}$$ سم³/ث

ب) $م = 4\pi نق^2 \therefore \frac{دم}{دنق} = 8\pi نق$

$$\frac{دم}{دن} = 8\pi (5) \times 1 = \boxed{40\pi}$$ سم²/ث

مثال 2

يزداد طول ضلع مكعب بمعدل 2 سم/ث. أوجد معدل زيادة حجمه عندما يكون طول ضلعه 8 سم.

الحل

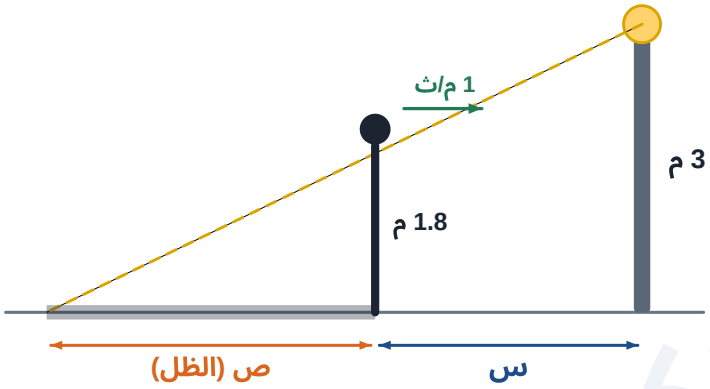
$ح = ل^3 \therefore \frac{دح}{دن} = \frac{دح}{دل} \times \frac{دل}{دن} = 3ل^2 \times 2 = 3(8)^2 \times 2 = \boxed{384}$ سم³/ث

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 3

رجل طوله 1.8 م يقترب من عمود إنارة ارتفاعه 3 م بسرعة 1 م/ث. أوجد معدل تغير طول ظله.

الحل



س بُعد الرجل عن العمود ، ص طول ظله

من تشابه المثلثين: $\frac{3}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{1.8}{\text{ص}}$

$3\text{ص} = 1.8\text{س} + 1.8\text{ص} \therefore 1.2\text{ص} = 1.8\text{س} \therefore \text{ص} = \frac{3}{2}\text{س}$

بما أن الرجل **يقترب** من العمود فإن س تتناقص: $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -1$ م/ث

$$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \frac{3}{2} = (-1) \times \frac{3}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}} \text{ م/ث}$$

أي أن طول الظل يتناقص بمعدل 1.5 م/ث.

ملاحظة

عندما يبتعد الشخص عن المصباح يكون $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ موجباً، وعندما يقترب منه يكون سالباً.

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 4

دائرتان متحدتا المركز، يتزايد طولا نصفي قطريهما بمعدل $\frac{1}{2}$ سم/ث. احسب معدل تغير المساحة بين الدائرتين لحظة يكون طولا نصفي القطرين 4 سم و 12 سم.

الحل

لكل دائرة: م = π نق^2 ∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = 2π نق × $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

الدائرة الكبرى: $2\pi(12) \times \frac{1}{2}$ = 12π الدائرة الصغرى: $2\pi(4) \times \frac{1}{2}$ = 4π

معدل تغير المساحة بين الدائرتين = 12π - 4π = **8π** سم^2/ث

مثال 5

مستطيل طوله يساوي دائماً أربعة أمثال عرضه، فإذا تزايد العرض بمعدل 0.5 سم/ث فأوجد معدل زيادة المساحة عندما يكون العرض 10 سم.

الحل

الطول = 4ض ، المساحة م = 4ض × ض = 4ض^2 ∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دض}}$ = 8ض

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = 8ض × $\frac{\text{دض}}{\text{دن}}$ = 8(10)(0.5) = **40** سم^2/ث

مثال 6

صُبّ رمل على أرض أفقية بمعدل 4 سم^3/ث فكوّن كومة على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي دائماً ثلاثة أرباع طول نصف قطر قاعدته. احسب معدل تغير نصف القطر عندما يكون طوله 4 سم.

الحل

ع = $\frac{3}{4}$ نق ∴ ح = $\frac{1}{3}$ π نق^2 × $\frac{3}{4}$ نق = $\frac{1}{4}$ π نق^3 ∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دنق}}$ = $\frac{3}{4}$ π نق^2

الدكتور سوسن عبد الرحمن

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\text{دح}}{\text{دنق}} \times \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \quad \therefore 4 = \frac{3}{4} \times 12\pi = \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \times \pi\,(4)^2 = \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$\therefore \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{4}{12\pi} = \boxed{\frac{1}{3\pi}} \text{ سم/ث}$$

مثال 7

تتحرك نقطة على المنحنى ص = س^3 ، فإذا تغير إحداثيها السيني بمعدل $\frac{1}{2}$ وحدة/ث ، فما معدل تغير إحداثيها الصادي عند س = 1؟

الحل

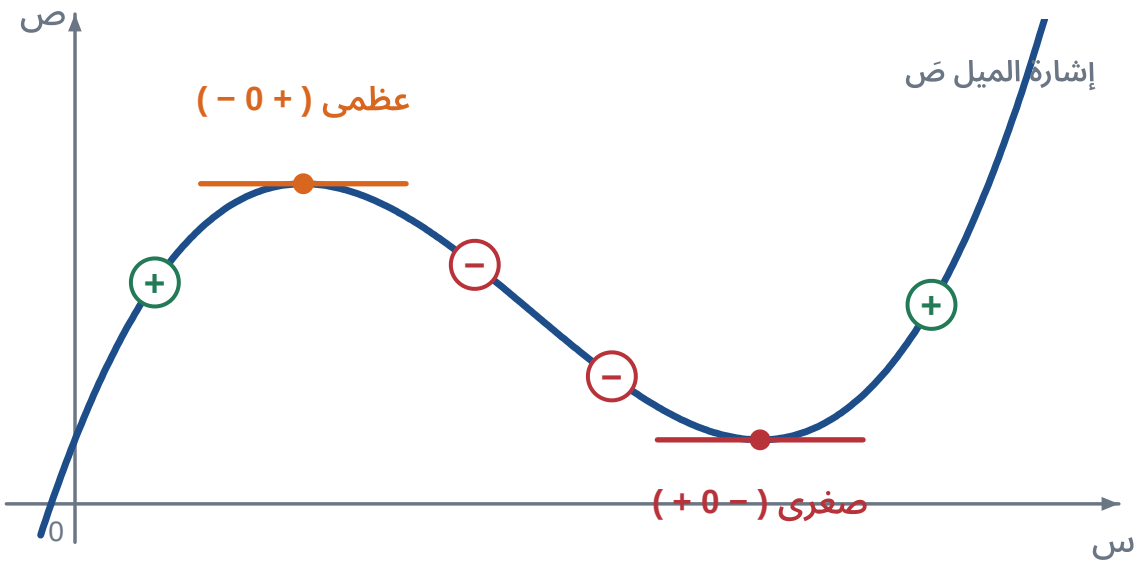
$$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 3\text{س}^2 \times \frac{1}{2} = 3(1)^2 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}} \text{ وحدة/ث}$$

4-2 النقط الحرجة (المحلية) ونقط الانقلاب

النقطة الحرجة

هي نقطة على المنحنى يكون عندها الميل صفراً $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 0\right)$ أو غير معرّف. وقد تكون نقطة **عظمى** أو **صغرى** أو **انقلاب**.

الدكتور يوسف عبد الرحمن



تغيّر إشارة الميل حول النقط الحرجة

نوع النقطة	تغيّر إشارة الميل صَ حول النقطة
عظمى محلية	(+ 0 -)
صغرى محلية	(- 0 +)
انقلاب (ميل صفري)	(+ 0 +) أو (- 0 -)

تحديد نوع النقطة الحرجة

أولاً: اختبار المشتقة الأولى

1. نحل صَ = 0 لإيجاد س ، ثم نوجد ص
2. نعوض في صَ بقيمة أقل من س وأخرى أكبر منها.
3. إذا تغيرت الإشارة من + إلى − فالنقطة عظمى، ومن − إلى + فهي صغرى، وإذا لم تتغير فليست عظمى ولا صغرى.

ثانياً: اختبار المشتقة الثانية

نعوض بقيمة س في صً:

- إذا كانت صً < 0 فالنقطة **عظمى**.
- إذا كانت صً > 0 فالنقطة **صغرى**.
- إذا كانت صً = 0 يفشل الاختبار، ونستخدم اختبار المشتقة الأولى.

الأستاذة سوسن عبد الرحمن

مثال 8

إذا كانت ص = 3س^2 - 12س فأوجد: أ) النقطة الحرجة. ب) نوعها.

الحل

أ) صَ = 6س - 12 = 0 ∴ س = 2 ∴ ص = 3(4) - 24 = -12 ∴ النقطة **(2 ، -12)**

ب) باختبار المشتقة الأولى:

س	0 (أقل من 2)	2	3 (أكبر من 2)
إشارة صَ	6(0) - 12 = -12 (−)	0	6(3) - 12 = 6 (+)

الإشارة (- 0 +) إذن النقطة **صغرى**. وباختبار المشتقة الثانية: صً = 6 > 0 إذن صغرى أيضاً.

ملاحظة

في الدالة التربيعية ص = أ س^2 + ب س + جـ : إذا كان معامل س^2 موجباً فالنقطة الحرجة صغرى، وإذا كان سالباً فهي عظمى.

• نقط الانقلاب والتقعر

نقطة الانقلاب

هي النقطة التي يتغير عندها اتجاه تقعر المنحنى (من أعلى إلى أسفل أو العكس)، ونجدها بحل المعادلة صً = 0 ثم التأكد من تغير إشارة صً حولها.

- إذا كانت صً > 0 في فترة فالمنحنى **مقعر لأعلى** فيها.
- إذا كانت صً < 0 في فترة فالمنحنى **مقعر لأسفل** فيها.

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 9

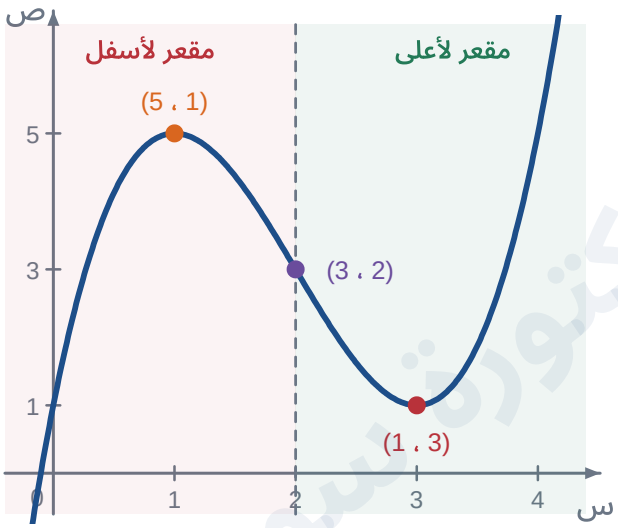
أوجد نقطة الانقلاب وفترات التقعر لأعلى ولأسفل للمنحنى

ص = س^{3} - 6س^{2} + 9س + 1

الحل

صَ = 3س^{2} - 12س + 9 ، صً = 6س - 12

صً = 0 ∴ س = 2 ∴ ص = 8 - 24 + 18 + 1 = 3 ∴ نقطة الانقلاب **(3 ، 2)**



منحنى ص = س^{3} − 6س^{2} + 9س + 1

- عندما س < 2: صً < 0 إذن المنحنى **مقعر لأسفل**
- عندما س > 2: صً > 0 إذن المنحنى **مقعر لأعلى**
- وللمنحنى أيضاً عظمى محلية عند (1 ، 5) وصغرى محلية عند (3 ، 1) لأن صَ = 3(س - 1)(س - 3)

مثال 10

أوجد نقطة الانقلاب للمنحنى ص = س^{3} - 3س - 1

الحل

صَ = 3س^{2} - 3 ، صً = 6س = 0 ∴ س = 0 ∴ ص = -1

الدكتور شنوسن عبد الرحمن

اختبار التقعر:

عند س = $-\frac{1}{2}$: صً = -3 (مقعر لأسفل) عند س = $\frac{1}{2}$: صً = 3 (مقعر لأعلى)

تغيرت إشارة صً إذن (0 ، -1) نقطة انقلاب. ولأن الميل عندها صَ = -3 ≠ 0 فهي نقطة انقلاب **غير حرجة**.

مثال 11

أوجد قيمة س التي يكون عندها للدالة ص = $-\frac{1}{4}$ (2 - س)^4 نقطة حرجة، وحدد نوعها.

الحل

صَ = $-\frac{1}{4}$ × 4 (2 - س)^3 × (-1) = (2 - س)^3

صَ = 0 ∴ س = 2 ∴ ص = 0 ، والنقطة الحرجة (2 ، 0)

س	1	2	3
صَ	(2 - 1)^3 = 1 (+)	0	(2 - 3)^3 = -1 (−)

الإشارة (+ 0 -) إذن النقطة **عظمى**.

4-3 السرعة والعجلة

تعريفات

- **السرعة القياسية:** تعتمد على المقدار فقط.
- **السرعة المتجهة:** تعتمد على المقدار والاتجاه معاً.
- **السرعة المتوسطة** = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}}$

العلاقة بين الإزاحة والسرعة والعجلة



التفاضل يحوّلنا يساراً، والتكامل يعيدنا يميناً

$$ع = \frac{دف}{دن} \quad \text{(السرعة)}$$

$$جـ = \frac{دع}{دن} = \frac{د^2ف}{دن^2} \quad \text{(العجلة)}$$

$$ف = \int ع \, دن \, ، \, ع = \int جـ \, دن$$

حالات خاصة

- يسكن الجسم لحظياً (أو يغير اتجاه حركته) عندما ع = 0
- يصل الجسم المقذوف رأسياً إلى أقصى ارتفاع عندما ع = 0
- يتحرك الجسم بسرعة منتظمة عندما جـ = 0

مثال 12

بدأ جسم حركته من النقطة و في خط مستقيم، بحيث يكون بُعده عن و بعد ن ثانية هو ف = $ن^3 - 6ن^2 + 9ن$ متر. أوجد السرعة والعجلة بدلالة ن ، ومتى يسكن الجسم لحظياً؟

الحل

$$ع = \frac{دف}{دن} = \boxed{3ن^2 - 12ن + 9} \text{ م/ث} \qquad جـ = \frac{دع}{دن} = \boxed{6ن - 12} \text{ م/ث}^2$$

يسكن لحظياً عندما ع = 0 : 3(ن - 1)(ن - 3) = 0 ∴ ن = 1 ث أو ن = 3 ث

الدكتورة نيوسن عبد الرحمن

مثال 13

تُعطى إزاحة جسم بالعلاقة ف = ن^2 - 5ن ، حيث ف بالمتر و ن بالثانية. أوجد إزاحة الجسم عندما يسكن لحظياً.

الحل

ع = 2ن - 5 = 0 ∴ ن = $\frac{5}{2}$ ث

ف = $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ - 5 × $\frac{5}{2}$ = $\frac{25}{4}$ - $\frac{50}{4}$ = $\boxed{-6.25 = -\frac{25}{4}}$ م

مثال 14

قُذف جسم رأسياً إلى أعلى بحيث يكون ارتفاعه بعد ن ثانية هو ف = 30ن - 10ن^2 متر. أوجد: أ) سرعته بدلالة ن. ب) ارتفاعه وسرعته بعد $\frac{1}{2}$ ثانية. جـ) أقصى ارتفاع يصل إليه.

الحل

أ) ع = 30 - 20ن

ب) عند ن = $\frac{1}{2}$: ف = 15 - 2.5 = $\boxed{12.5}$ م ، ع = 30 - 10 = $\boxed{20}$ م/ث

جـ) أقصى ارتفاع عندما ع = 0 : 30 - 20ن = 0 ∴ ن = 1.5 ث

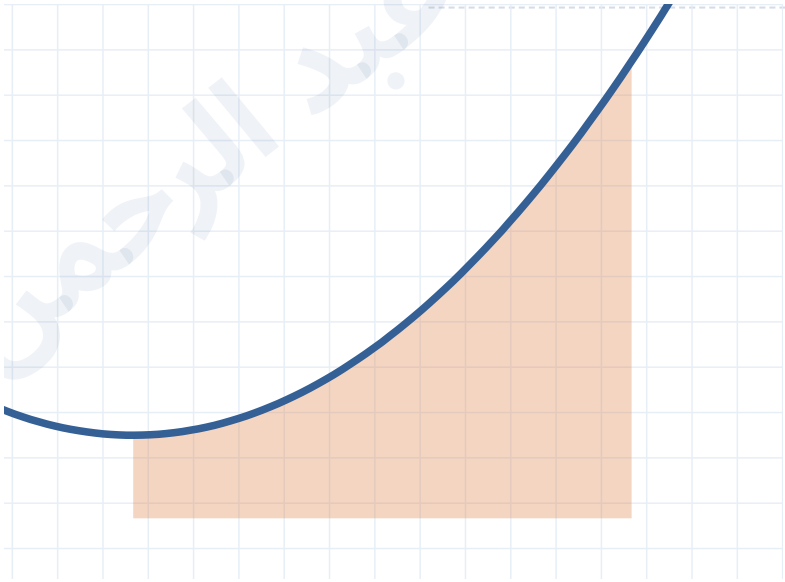
ف = 30(1.5) - 10(1.5)^2 = 45 - 22.5 = $\boxed{22.5}$ م

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

الباب الخامس

التكامل وتطبيقاته

- التكامل غير المحدود والمحدود
- المساحات المحصورة بين المنحنيات
- حجوم الأجسام الدورانية
- الحركة في خط مستقيم



الدكتور سوسن عبد الرحمن

5-1 التكامل غير المحدود

تعريف

التكامل عملية عكسية للتفاضل. والتكامل غير المحدود ليس له قيمة عددية، بل هو دالة تحتوي على ثابت يُسمى **ثابت التكامل** ويُرمز له بالرمز ث

قواعد التكامل

1) $\int$ أ دس = أ س + ث حيث أ عدد ثابت

2) $\int س^{ن}$ دس = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث حيث ن ≠ -1

3) $\int (أس + ب)^{ن}$ دس = $\frac{(أس + ب)^{ن+1}}{أ\,(ن+1)}$ + ث

4) $\int$ [د(س) ± هـ(س)] دس = $\int$ د(س) دس ± $\int$ هـ(س) دس

مثال 1

أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int$ 8 دس

2) $\int \frac{3}{4}$ دس

3) $\int س^{5}$ دس

4) $\int \sqrt{س}$ دس

5) $\int 3 س^{-5}$ دس

6) $\int (5س - 2)^{7}$ دس

7) $\int \sqrt{6س - 3}$ دس

الحل

1) 8س + ث

2) $\frac{3}{4}$ س + ث

الدكتور سوسن عبد الرحمن

3) $\frac{س^6}{6} + ث$

4) $\int س^{\frac{1}{2}}\ دس = \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ث = \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ث$

5) $\frac{3\ س^{-4}}{-4} + ث = -\frac{3}{4\ س^4} + ث$

6) $\frac{(5س - 2)^8}{5 \times 8} + ث = \frac{(5س - 2)^8}{40} + ث$

7) $\frac{(6س - 3)^{\frac{3}{2}}}{6 \times \frac{3}{2}} + ث = \frac{(6س - 3)^{\frac{3}{2}}}{9} + ث$

5-2 التكامل المحدود

قاعدة

إذا كانت ت(س) دالة تكاملها د(س) فإن:

$\int_{أ}^{ب} د(س)\ دس = [ت(س)]_{أ}^{ب} = ت(ب) - ت(أ)$

ولا نحتاج في التكامل المحدود إلى ثابت التكامل.

مثال 2

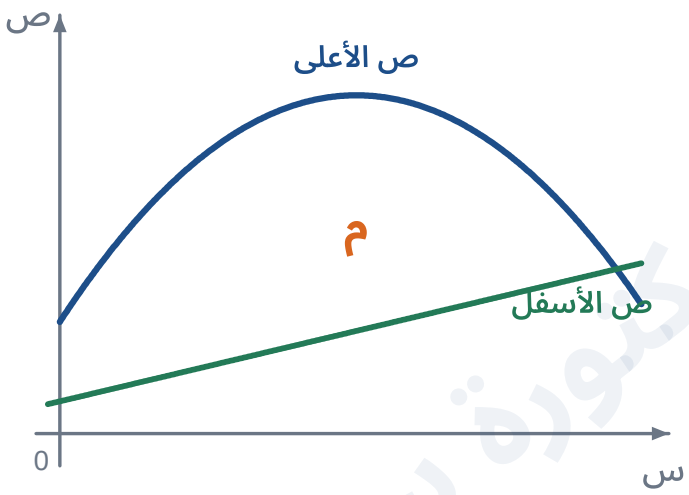
أوجد قيمة كل من التكاملين: 1) $\int_{1}^{2} (3س^2 + 1)\ دس$ 2) $\int_{0}^{4} \sqrt{2س + 1}\ دس$

الحل

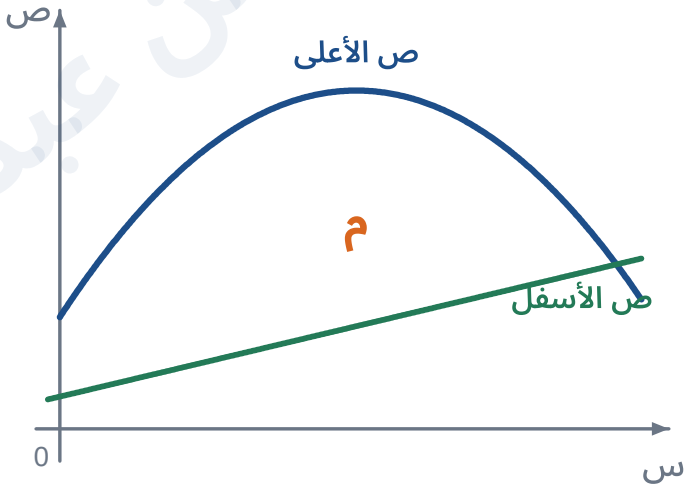
1) $[س^3 + س]_{1}^{2} = (2 + 8) - (1 + 1) =$ **8**

$$\int_0^4 \left[\frac{\frac{3}{2}(1 + 2س)}{\frac{3}{2} \times 2} \right] (2 = \left[\frac{3}{2}(1) - \frac{3}{2}(9) \right] \frac{1}{3} = (1 - 27) \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

5-3 إيجاد المساحات



(2) المساحة بين منحنيين



(2) المساحة بين منحنيين

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

قوانين المساحة

بالنسبة لمحور السينات (الدالة صريحة في ص):

- بين منحنى ومحور السينات:

$$م = \int_{أ}^{ب} ص \, دس$$

- إذا كان المنحنى **تحت** محور السينات نأخذ القيمة المطلقة.
- بين منحنيين:

$$م = \int_{أ}^{ب} (ص_{الأعلى} - ص_{الأسفل}) \, دس$$

بالنسبة لمحور الصادات (الدالة صريحة في س):

- بين منحنى ومحور الصادات:

$$م = \int_{أ}^{ب} س \, دص$$

- بين منحنيين:

$$م = \int_{أ}^{ب} (س_{الأيمن} - س_{الأيسر}) \, دص$$

تحديد حدود التكامل

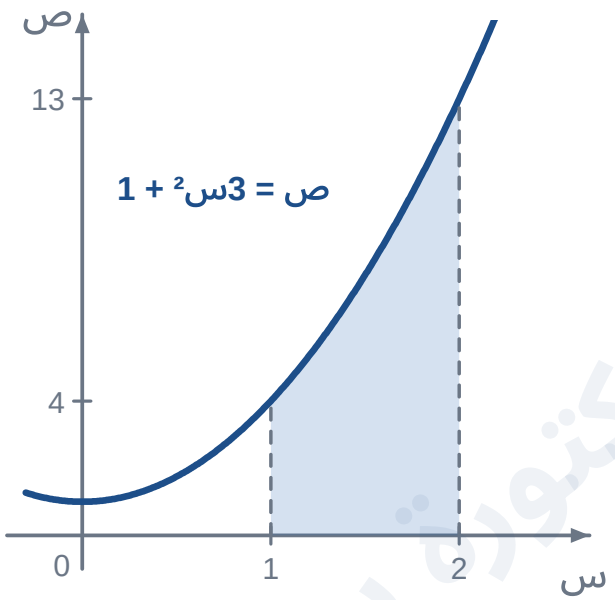
- إذا تقاطع منحنيان (أو منحنى ومستقيم) نساوي المعادلتين ونحل لإيجاد قيم س.
- إذا قطع المنحنى أحد المحورين نضع ص = 0 (أو س = 0) ونحل.
- إذا قطع المنحنى محور السينات داخل فترة التكامل نقسم التكامل عند نقطة القطع.

الدكتور نبوغ سليمان عبد الرحمن

مثال 3

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = 3س^2 + 1 ومحور السينات والمستقيمين س = 1 ، س = 2

الحل



المنحنى فوق محور السينات في الفترة [1 ، 2]:

م = $\int_1^2$ (3س^2 + 1) دس = [س^3 + س]$_1^2$

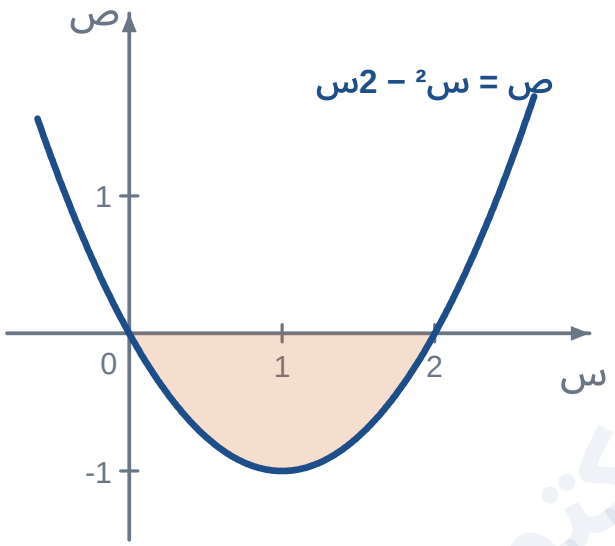
= 10 - 2 = **8** وحدة مربعة

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 4

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = س^2 - 2س ومحور السينات.

الحل



حدود التكامل: س^2 - 2س = 0 ∴ س(س - 2) = 0 ∴ س = 0 أو س = 2

$$\int_0^2 (س^2 - 2س)\ دس = \left[\frac{س^3}{3} - س^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

الإشارة سالبة لأن المنطقة تحت محور السينات، إذن:

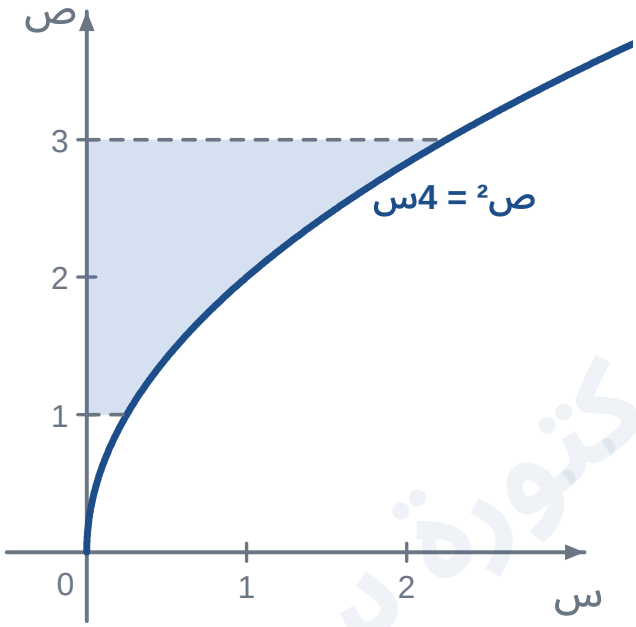
$$م = \left|-\frac{4}{3}\right| = \boxed{\frac{4}{3}}$$ وحدة مربعة

الدكتورة ياسمين عبد الرحمن

مثال 5

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص^2 = 4س$ ومحور الصادات والمستقيمين $ص = 1$ ، $ص = 3$

الحل



نكتب الدالة صريحة في س: $س = \frac{ص^2}{4}$

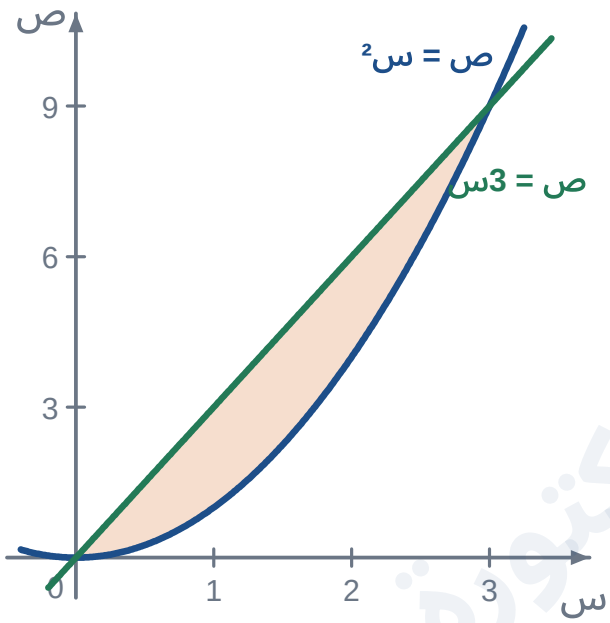
$$م = \int_1^3 \frac{ص^2}{4}\ دص = \left[\frac{ص^3}{12}\right]_1^3 = \frac{27 - 1}{12} = \frac{13}{6}$$ وحدة مربعة

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 6

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص = س^2 ، ص = 3س

الحل



نقط التقاطع: س^2 = 3س ∴ س(س - 3) = 0 ∴ س = 0 أو س = 3

في الفترة [0 ، 3] المستقيم أعلى من المنحنى (مثلاً عند س = 1: 3 > 1):

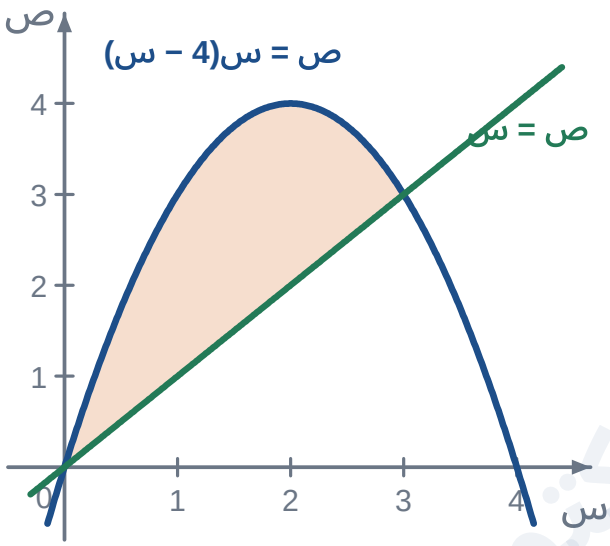
$$م = \int_0^3 (3س - س^2)\ دس = \left[\frac{3س^2}{2} - \frac{س^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 7

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص = س ، ص = س(4 - س)

الحل



نقط التقاطع: س = 4س - س^2 ∴ س^2 - 3س = 0 ∴ س = 0 أو س = 3

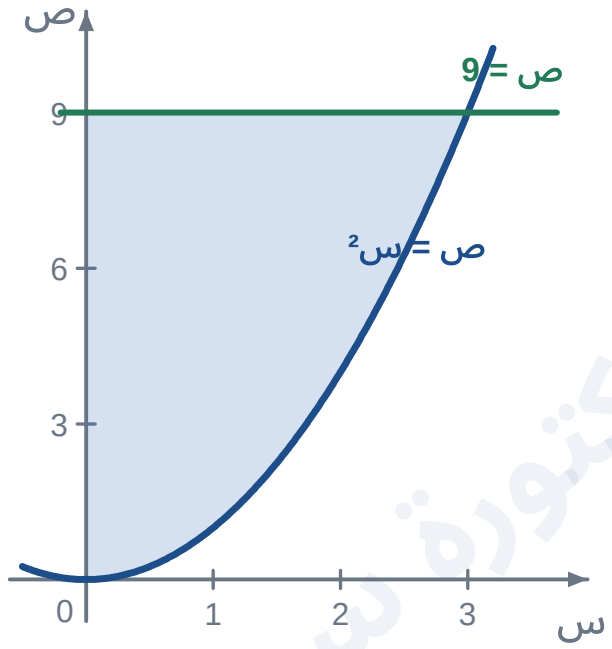
م = $\int_0^3$ [(4س - س^2) - س] دس = $\int_0^3$ (3س - س^2) دس = $\frac{9}{2}$ وحدة مربعة

الدكتورة نهوس عبد الرحمن

مثال 8

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = س^2 والمستقيمين ص = 9 ، س = 0 في الربع الأول.

الحل



التقاطع: س^2 = 9 ∴ س = 3 (في الربع الأول)

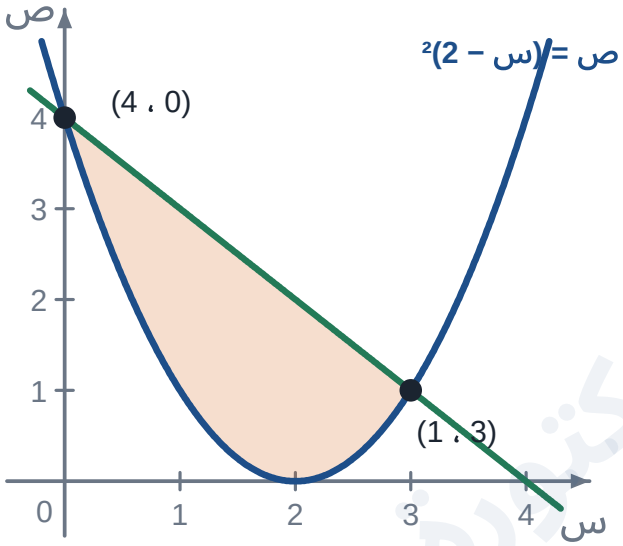
م = $\int_0^3$ (9 - س^2) دس = $\left[9س - \frac{س^3}{3} \right]_0^3$ = 27 - 9 = **18** وحدة مربعة

الدكتورة نسوسن عبد الرحمن

مثال 9

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = $(\text{س} - 2)^2$ والمستقيم المار بالنقطتين (0 ، 4) و (3 ، 1)

الحل



ميل المستقيم = $\frac{4 - 1}{0 - 3}$ = -1 ∴ معادلته ص = -س + 4

المستقيم والمنحنى يتقاطعان عند س = 0 و س = 3 ، والمستقيم أعلى بينهما:

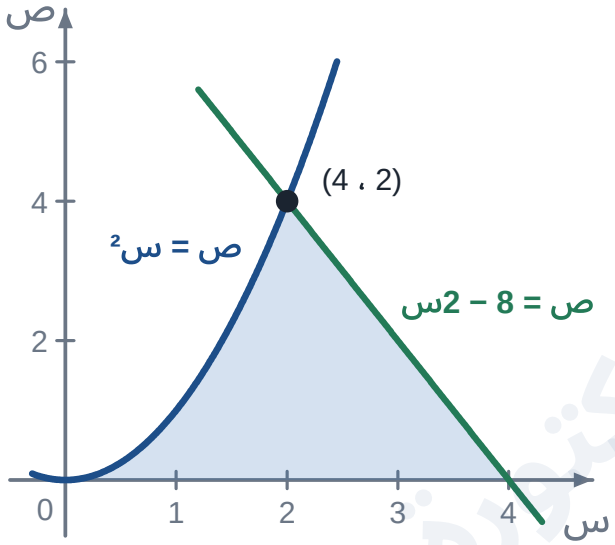
م = $\int_0^3$ [(4 - س) - $(\text{س} - 2)^2$] دس = $\int_0^3$ (3س - س^2) دس = $\frac{9}{2}$ وحدة مربعة

الدكتوره سوسن عبدالرحمن

مثال 10

من الشكل، أوجد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى ص = $س^2$ والمستقيم ص = 8 - 2س ومحور السينات.

الحل



يتقاطع المنحنى والمستقيم عند (2 ، 4) ، ويقطع المستقيم محور السينات عند س = 4:

$$م = \int_0^2 س^2 \, دس + \int_2^4 (8 - 2س) \, دس$$

$$= \left[\frac{س^3}{3}\right]_0^2 + \left[8س - س^2\right]_2^4 = \frac{8}{3} + (12 - 16) = \frac{20}{3}$$ وحدة مربعة

مثال 11

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $س^2$ ص = 1 والمستقيمين س = 1 ، س = 2 ومحور السينات.

الحل

$$ص = \frac{1}{س^2} = س^{-2}$$

$$م = \int_1^2 س^{-2} \, دس = \left[-\frac{1}{س}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

وحدة مربعة

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 12

إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = 2س^4 ومحور السينات والمستقيمين س = 1 ، س = أ تساوي 12.4 وحدة مربعة ، فأوجد قيمة أ (حيث أ > 1)

الحل

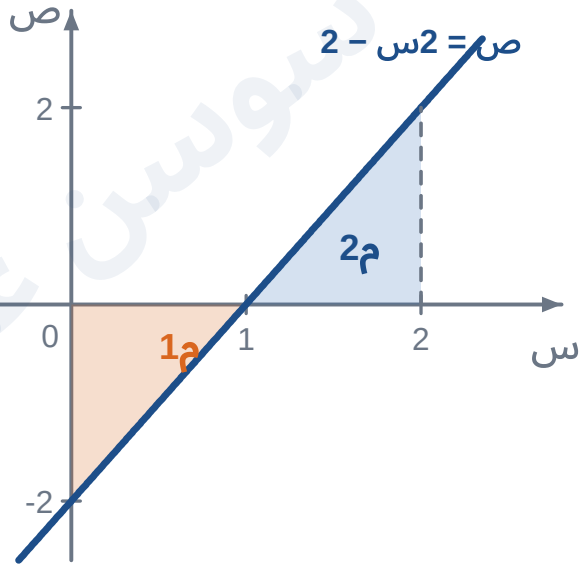
$$\int_1^{أ} 2س^4 \, دس = \left[\frac{2س^5}{5}\right]_1^{أ} = \frac{2}{5}(أ^5 - 1) = 12.4$$

$$أ^5 - 1 = 31 \therefore أ^5 = 32 \therefore \boxed{أ = 2}$$

مثال 13

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم ص = 2س - 2 ومحور السينات والمستقيمين س = 0 ، س = 2

الحل



المستقيم يقطع محور السينات عند س = 1 ، فنقسم التكامل:

$$م_1 = \left| \int_0^1 (2س - 2) \, دس \right| = \left| \left[س^2 - 2س\right]_0^1 \right| = |-1| = 1$$

$$م_2 = \int_1^2 (2س - 2) \, دس = \left[س^2 - 2س\right]_1^2 = 0 - (-1) = 1$$

الدكتورة سيوسن عبد الرحمن

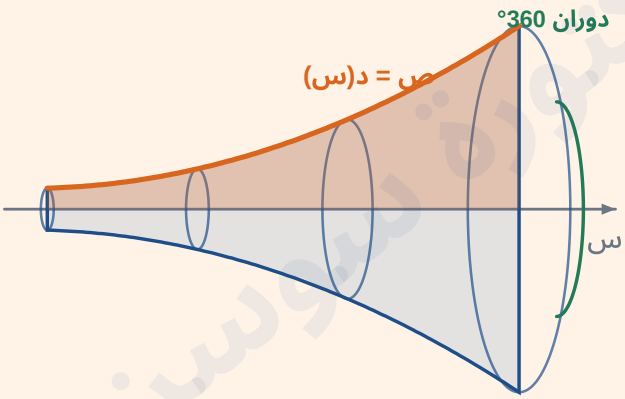
المساحة الكلية = $م_1 + م_2$ = 2 وحدة مربعة

انتبه

لو حسبنا $\int_0^2$ (2س - 2) دس مباشرة لكان الناتج صفراً! لذلك يجب تقسيم التكامل عند نقطة القطع مع محور السينات.

5-4 حجوم الأجسام الدورانية

قاعدة



دوران منطقة حول محور السينات يولّد جسماً دورانياً

- الدوران حول محور السينات: ح = $\pi \int_أ^ب$ ص^2 دس
- الدوران حول محور الصادات: ح = $\pi \int_أ^ب$ س^2 دص
- الدوران حول المستقيم ص = ك: ح = $\pi \int_أ^ب$ (ص - ك)^2 دس

الدكتور: يوسن عبد الرحمن

أجسام دورانية مشهورة (دورة كاملة)

- المستطيل حول أحد أضلاعه ← أسطوانة.
- المثلث القائم حول أحد ضلعي القائمة ← مخروط قائم.
- شبه المنحرف القائم حول ضلعه العمودي ← مخروط ناقص.
- نصف الدائرة حول قطرها ← كرة.

مثال 14

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = $س^2$ ومحور السينات والمستقيمين س = 0 ، س = 2 دورة كاملة حول محور السينات.

الحل

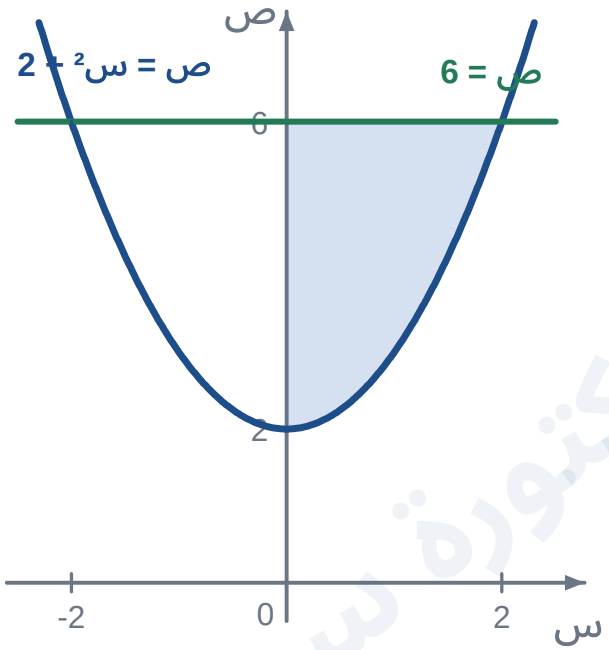
$$ح = \pi \int_0^2 (س^2)^2 \, دس = \pi \left[\frac{س^5}{5} \right]_0^2 = \boxed{\pi \frac{32}{5}} \text{ وحدة مكعبة}$$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 15

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = س^2 + 2 والمستقيم ص = 6 ومحور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات.

الحل



الدوران حول محور الصادات، فنكتب س^2 بدلالة ص: س^2 = ص - 2

حدود التكامل: من ص = 2 (رأس المنحنى) إلى ص = 6

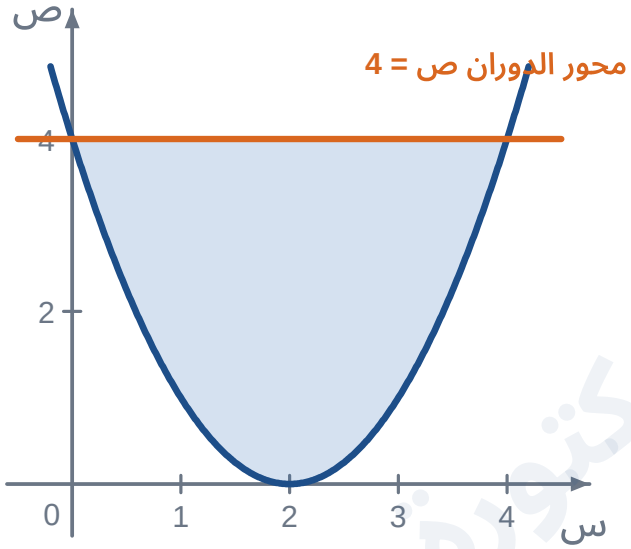
$$\text{ح} = \pi \int_{2}^{6} (\text{ص} - 2) \, d\text{ص} = \pi \left[\frac{(\text{ص} - 2)^2}{2} \right]_{2}^{6} = \boxed{8\pi} \text{ وحدة مكعبة}$$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 16

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى
ص = س^2 - 4س + 4 والمستقيم ص = 4 دورة كاملة حول المستقيم ص = 4

الحل



التقاطع: س^2 - 4س + 4 = 4 ∴ س(س - 4) = 0 ∴ س = 0 ، س = 4

ح = π $\int_0^4$ (س^2 - 4س + 4 - 4)^2 دس = π $\int_0^4$ (س^4 - 8س^3 + 16س^2) دس

= π $\left[\frac{5}{5}\text{س} - 2\text{س}^4 + \frac{16\text{س}^3}{3} \right]_0^4$ = $\frac{512}{15}$ π ≈ 34.13 π وحدة مكعبة

مثال 17

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = س^2
والمستقيمين س = 0 ، ص = 1 في الربع الأول، دورة كاملة حول المستقيم ص = 1

الحل

التقاطع: س^2 = 1 ∴ س = 1

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

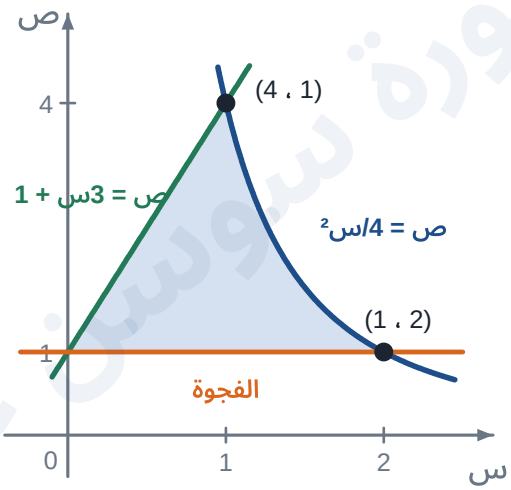
$$ح = \pi \int_0^1 (1 - س^2)^2 \, دس = \pi \int_0^1 (س^4 + 2س^2 - 1) \, دس = \pi \left[\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 \right]$$

$$= \pi \frac{8}{15} \text{ وحدة مكعبة}$$

مثال 18

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات، حيث تحدها من أعلى القطعة المستقيمة ص = 3س + 1 من (0 ، 1) إلى (1 ، 4) ثم المنحنى ص = $\frac{4}{س^2}$ من (1 ، 4) إلى (2 ، 1) ، ومن أسفل المستقيم ص = 1

الحل



الحجم = (حجم ما تحت الحد العلوي) − (حجم الفجوة تحت ص = 1):

$$ح = \pi \int_0^1 (3س + 1)^2 \, دس + \pi \int_1^2 \left[\frac{4}{س^2} \right]^2 \, دس - \pi \int_0^2 (1)^2 \, دس$$

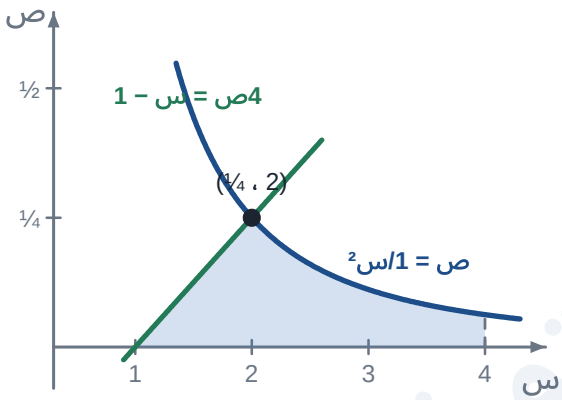
$$= 7\pi + \frac{14}{3}\pi - 2\pi = \pi \frac{29}{3} \text{ وحدة مكعبة}$$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 19

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المستقيم 4ص = س - 1 والمنحنى ص = $\frac{1}{س^2}$ ومحور السينات والمستقيم س = 4 دورة كاملة حول محور السينات.

الحل



المستقيم يقطع محور السينات عند س = 1 ، ويتقاطع مع المنحنى عند (2 ، $\frac{1}{4}$):

$$ح_1 = \pi \int_1^2 \left(\frac{س - 1}{4}\right)^2 دس = \frac{\pi}{16} \left[\frac{(س - 1)^3}{3}\right]_1^2 = \frac{\pi}{48}$$

$$ح_2 = \pi \int_2^4 \left(\frac{1}{س^2}\right)^2 دس = \pi \left[\frac{1}{3س^3}\right]_2^4 = \frac{7\pi}{192}$$

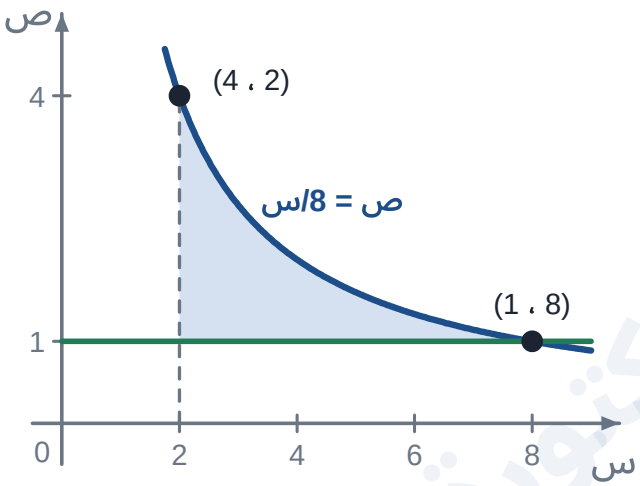
$$ح = \frac{\pi}{48} + \frac{7\pi}{192} = \boxed{\frac{11\pi}{192}}$$ وحدة مكعبة

الدكتورة يسرين عبد الرحمن

مثال 20

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = $\frac{8}{\text{س}}$ والمستقيم ص = 1 والمستقيم س = 2 دورة كاملة حول محور السينات.

الحل



التقاطع: $\frac{8}{\text{س}} = 1 \therefore$ س = 8

الحجم الخارجي: $\pi \int_{2}^{8} \frac{64}{\text{س}^2}$ دس = $24\pi = 64\pi \left[-\frac{1}{\text{س}}\right]_{2}^{8}$

حجم الفجوة: $\pi \int_{2}^{8} (1)^2$ دس = 6π

الحجم المطلوب = $24\pi - 6\pi = \boxed{18\pi}$ وحدة مكعبة

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

5-5 الحركة في خط مستقيم (تكامل السرعة والعجلة)

قاعدة

ع = $\int$ جـ دن ف = $\int$ ع دن

وتُستخدم الشروط الابتدائية (مثل قيمة ف أو ع عند ن = 0) لإيجاد ثابت التكامل.

والمسافة المقطوعة في الثانية رقم ن هي: $\int_{ن-1}^{ن}$ ع دن

مثال 21

يتحرك جسيم في خط مستقيم بسرعة ع = أ ن^2 + ب ن حيث أ ، ب ثابتان. إذا كانت عجلة الجسيم عند ن = 0 تساوي 2 م/ث^2 ، وقطع الجسيم 81 م في الثانية الرابعة، فأوجد قيمتي أ ، ب

الحل

جـ = $\frac{دع}{دن}$ = 2أ ن + ب ، وعند ن = 0: 2 = ب ∴ **ب = 2**

المسافة في الثانية الرابعة (من ن = 3 إلى ن = 4):

$\int_{3}^{4}$ (أ ن^2 + 2ن) دن = $\left[\frac{أ\,ن^3}{3} + ن^2\right]_3^4$ = $\frac{(64 - 27)أ}{3}$ + (16 - 9) = $\frac{37أ}{3}$ + 7

$\frac{37أ}{3}$ + 7 = 81 ∴ $\frac{37أ}{3}$ = 74 ∴ **أ = 6**

تمرين 1

أوجد ف بدلالة ن في كل مما يأتي:

1) $\frac{دف}{دن}$ = 6ن ، وكانت ف = 1 عندما ن = 0

2) $\frac{د^2ف}{دن^2}$ = 2ن^2 ، وكانت ع = 0 ، ف = 2 عندما ن = 0

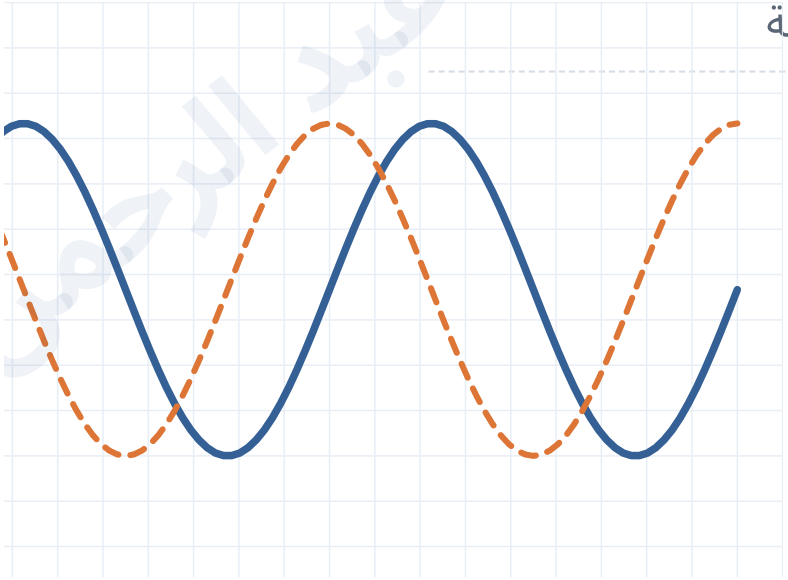
3) $\frac{د^2ف}{دن^2}$ = 24ن ، وكانت $\frac{دف}{دن}$ = 1 ، ف = 0 عندما ن = 0

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

الباب السادس

تفاضل وتكامل الدوال المثلثية

- مشتقات الدوال المثلثية
- تطبيقات على المشتقات المثلثية
- تكامل الدوال المثلثية
- مساحات تحت منحنيات مثلثية



الدكتورة سوسن عبد الرحمن

6-1 تفاضل الدوال المثلثية

جدول المشتقات (الزاوية بالتقدير الدائري)

الدالة ص	المشتقة صَ	الدالة ص	المشتقة صَ
جاس	جتاس	جا(أس + ب)	أ جتا(أس + ب)
جتاس	−جاس	جتا(أس + ب)	-أ جا(أس + ب)
ظاس	قا^{2}س	ظا(أس + ب)	أ قا^2(أس + ب)
ظتاس	-قتا^{2}س	جا^{ن}(أس)	ن جا$^{ن - 1}$(أس) × أ جتا(أس)
قاس	قاس ظاس	جتا^{ن}(أس)	-ن جتا$^{ن - 1}$(أس) × أ جا(أس)
قتاس	−قتاس ظتاس	ظا^{ن}(أس)	ن ظا$^{ن - 1}$(أس) × أ قا^2(أس)

طريقة سهلة للحفظ

- تفاضل النسبة × تفاضل الزاوية.
- وإذا كانت النسبة مرفوعة لأس: تفاضل الأس × تفاضل النسبة × تفاضل الزاوية.
- النسب التي تبدأ بحرف "جتا" أو "ظتا" أو "قتا" تكون مشتقتها سالبة.

مثال 1

أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

1) $جا5س$

2) $جتا2س$

3) $4\ ظا\ \frac{1}{2}س$

4) $جا(2س - 1)$

5) $\frac{جاس}{س}$

6) $جتا(1 - 3س)$

7) $س\ جاس$

8) $جاس\ ظاس$

9) $2\ ظا\left(3 - \frac{1}{2}س\right)$

10) $قتا3س$

11) $جا^3س$

12) $5\ جتا^3 4س$

13) $ظا^4 2س$

الحل

1) $5\ جتا5س$

2) $-2\ جا2س$

3)

$$4 \times \frac{1}{2}\ قا^2\ \frac{1}{2}س = 2\ قا^2\ \frac{1}{2}س$$

4) $2\ جتا(2س - 1)$

5) $\frac{س\ جتاس - جاس}{س^2}$

6)

$$-جا(1 - 3س) \times (-3) = 3\ جا(1 - 3س)$$

7) $س\ جتاس + جاس$

8) $جاس\ قا^2س + ظاس\ جتاس$

$= جاس\ قا^2س + جاس = جاس(قا^2س + 1)$

9) $قا^2\left(3 - \frac{1}{2}س\right)$

10) $-3\ قتا3س\ ظتا3س$

11) $3\ جا^2س\ جتاس$

12) $15\ جتا^2 4س \times (-4\ جا4س)$

$= -60\ جتا^2 4س\ جا4س$

13)

$$4\ ظا^3 2س \times 2\ قا^2 2س = 8\ ظا^3 2س\ قا^2 2س$$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 2

أوجد قيم س في الفترة $[0 ، 2\pi]$ التي يكون عندها للمنحنى ص = جاس (1 + جتاس) نقط حرجة.

الحل

$ص = جاس(-جاس) + (1 + جتاس) جتاس = -جا^2س + جتاس + جتا^2س$

بوضع $جا^2س = 1 - جتا^2س$: $ص = 2 جتا^2س + جتاس - 1$

$ص = 0 \therefore (2 جتاس - 1)(جتاس + 1) = 0$

$جتاس = \frac{1}{2}$ $\quad$ $جتاس = -1$

$\therefore س = \frac{\pi}{3}$ أو $س = \frac{5\pi}{3}$ $\quad$ $\therefore س = \pi$

مثال 3

إذا كانت $ص = \frac{1}{8} جا(س + 3) ظتا(س + 3)$ فأوجد ص

الحل

$ظتا(س + 3) = \frac{جتا(س + 3)}{جا(س + 3)}$ ، إذن: $ص = \frac{1}{8} جتا(س + 3)$

$\therefore$ **$ص = -\frac{1}{8} جا(س + 3)$**

مثال 4

إذا كانت $ص = جا2س جتا2س$ فأوجد ص عند $س = \frac{\pi}{3}$

الحل

$ص = \frac{1}{2} \times 2 جا2س جتا2س = \frac{1}{2} جا4س$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

صَ = 2 جتا4س صً = -8 جا4س

صً $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = -8 جا $\frac{4\pi}{3}$ × -8 = $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ = $4\sqrt{3}$

مثال 5 — مثال مهم

أوجد $\frac{د}{دس}$ [جا 3س°] (الزاوية بالدرجات)

الحل

قوانين التفاضل تشترط التقدير الدائري، فنحوّل: 3س° = $\frac{3س\ \pi}{180}$ = $\frac{\pi}{60}$ س راديان

$\frac{د}{دس}$ جا $\left(\frac{\pi}{60}س\right)$ = $\frac{\pi}{60}$ جتا $\left(\frac{\pi}{60}س\right)$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

6-2 تكامل الدوال المثلثية

قاعدة

- $\int$ جاس دس = -جتاس + ث
- $\int$ جتاس دس = جاس + ث
- $\int$ قا^{2}س دس = ظاس + ث
- $\int$ قتا^{2}س دس = -ظتاس + ث
- $\int$ جا(أس + ب) دس = $-\frac{1}{\text{أ}}$ جتا(أس + ب) + ث
- $\int$ جتا(أس + ب) دس = $\frac{1}{\text{أ}}$ جا(أس + ب) + ث
- $\int$ قا^2(أس + ب) دس = $\frac{1}{\text{أ}}$ ظا(أس + ب) + ث

أي: تكامل النسبة × $\frac{1}{\text{تفاضل الزاوية}}$

مثال 6

أوجد التكاملات الآتية:

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

1) $\int$ جتا2س دس

2) $\int$ قا^2 5س دس

3) $\int$ 3 جتا3س دس

4) $\int$ $-\frac{2}{3}$ جتا س دس

5) $\int$ قا^2(2س + 3) دس

6) $\int$ $\frac{3}{4}$ جتا(1 - 4س) دس

الحل

1) $\frac{1}{2}$ جا2س + ث

2) $\frac{1}{5}$ ظا5س + ث

3) $\frac{3}{3}$ جا3س + ث = جا3س + ث

4) $-\frac{3}{2}$ جا $\frac{2}{3}$ س + ث

5) $\frac{1}{2}$ ظا(2س + 3) + ث

6) $\frac{1}{-4}$ × $\frac{3}{4}$ جا(1 - 4س) + ث

$= -\frac{3}{16}$ جا(1 - 4س) + ث

مثال 7

أوجد قيمة كل من التكاملات المحدودة الآتية:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ جتاس دس

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ (جتاس + 1) دس

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ جا^{3}س جتاس دس

الحل

1) $\left[\text{جاس} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ = جا $\frac{\pi}{2}$ - جا0 = 1 - 0 = **1**

2) $\left[\text{جاس} + \text{س} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ = $\left(1 + \frac{\pi}{2} \right)$ - (0 + 0) = **$\frac{\pi}{2}$ + 1**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

3) لأن جتاس هي مشتقة جاس: $\left[\frac{\text{جا}^4\text{س}}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} =$

$\frac{1}{16}$

مثال 8

أوجد التكاملات الآتية باستخدام المتطابقات المثلثية:

1) $\int$ (1 + ظا^{2}س) دس 2) $\int$ (جتا^{2}س + جا^{2}س) دس

3) $\int$ (جتا^{2}س - جا^{2}س) دس 4) $\int$ ظاس (ظاس + ظتاس) دس

الحل

1) $\int$ قا^{2}س دس = **ظاس + ث**

2) $\int$ 1 دس = **س + ث**

3) $\int$ جتا2س دس = $\frac{1}{2}$ **جا2س + ث**

4) $\int$ (ظا^{2}س + ظاس ظتاس) دس = $\int$ (ظا^{2}س + 1) دس = $\int$ قا^{2}س دس =

ظاس + ث

مثال 9

بوضع 2 جتا^{2}س بدلالة جتا2س ، أوجد $\int$ 2 جتا^{2}س دس

الحل

جتا2س = 2 جتا^{2}س - 1 ∴ 2 جتا^{2}س = 1 + جتا2س

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

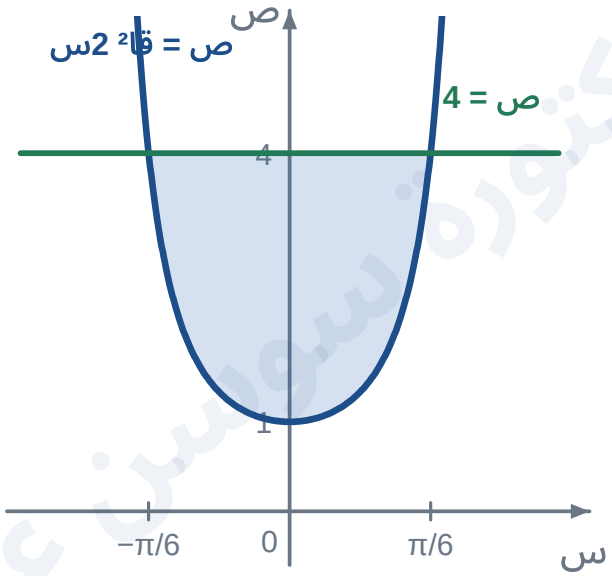
$$\int (1 + \text{جتا}2س)\ \text{دس} = \boxed{س + \frac{1}{2}\ \text{جا}2س + ث}$$

6-3 مساحات تحت منحنيات مثلثية

مثال 10

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = قا^2 2س والمستقيم ص = 4

الحل



التقاطع: قا^2 2س = 4 ∴ جتا2س = ± $\frac{1}{2}$ ∴ س = ± $\frac{\pi}{6}$

(عند س = $\frac{\pi}{6}$: ص = قا^2 $\frac{\pi}{3}$ = 4)

$$م = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (4 - \text{قا}^2 2س)\ \text{دس} = \left[4س - \frac{1}{2}\ \text{ظا}2س\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

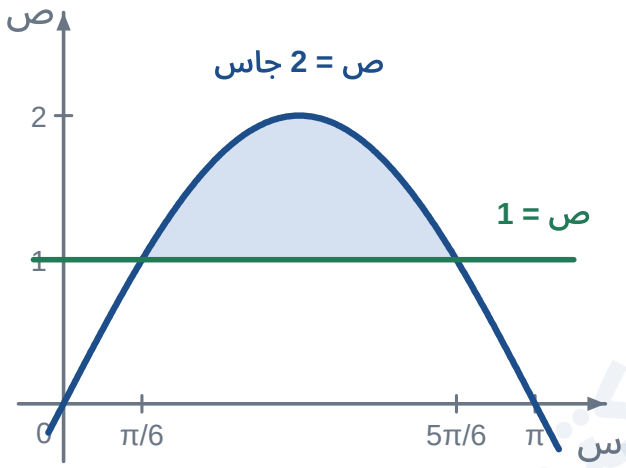
$$= \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \approx 2.46}\ \text{وحدة مربعة}$$

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 11

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = 2 جاس والمستقيم ص = 1 في الفترة [0 ، π]

الحل



التقاطع: 2 جاس = 1 ∴ جاس = $\frac{1}{2}$ ∴ س = $\frac{\pi}{6}$ أو س = $\frac{5\pi}{6}$

م = $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$ (2 جاس - 1) دس = $\left[-2 \text{ جتاس} - \text{س} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$

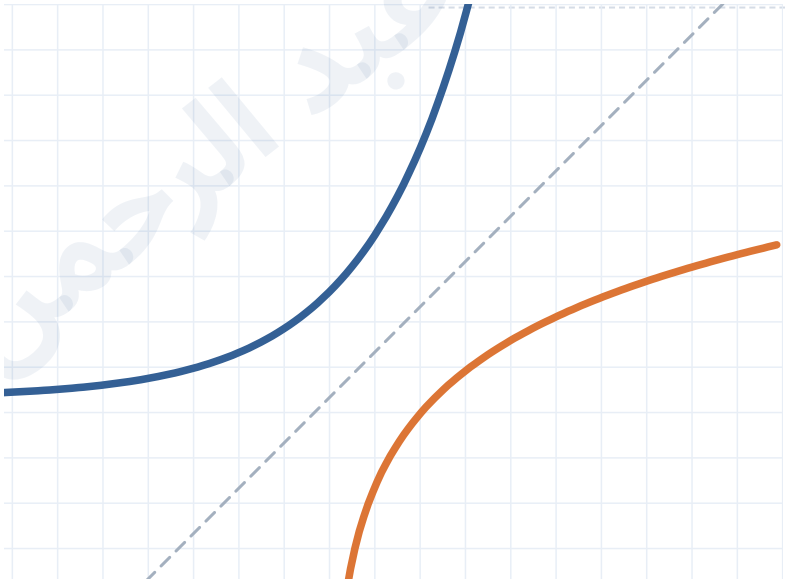
= $\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \right) - \left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} - \right)$ = $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\,2 \approx 1.37$ وحدة مربعة

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

الباب السابع

الدوال اللوغاريتمية والأسية

- مراجعة خواص اللوغاريتمات
- تفاضل الدالة اللوغاريتمية وتكاملها
- الدالة الأسية الطبيعية
- تفاضل الدالة الأسية وتكاملها



الدكتور سوسن عبد الرحمن

7-1 تفاضل الدالة اللوغاريتمية

مراجعة: خواص اللوغاريتمات (لو = اللوغاريتم الطبيعي للأساس هـ)

- لو(س ص) = لو س + لو ص
- لو $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لو س - لو ص
- لو $\text{س}^{\text{ن}}$ = ن لو س
- لو هـ = 1 ، لو 1 = 0
- $\text{هـ}^{\text{لو س}}$ = س ، لو $\text{هـ}^{\text{س}}$ = س

قاعدة

$\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ لو س = $\frac{1}{\text{س}}$ ، وبصورة عامة: $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ لو د(س) = $\frac{\text{دَ(س)}}{\text{د(س)}}$ = $\frac{\text{تفاضل الدالة}}{\text{الدالة نفسها}}$

مثال 1

أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

1) لو(3س + 1)

2) لو جتاس

3) لو $\frac{\text{س} + 1}{1 - \text{س}4}$

4) لو(1 + جاس)

5) س^{3} لو 3س

6) لو $\sqrt{\text{س} + 1}$

7) لو $(1 + \text{س}^{2})^{5}$

الحل

1) $\frac{3}{1 + \text{س}3}$

2) $\frac{\text{-جاس}}{\text{جتاس}}$ = -ظاس

3) نفك أولاً: لو(س + 1) - لو(4س - 1) ، والمشتقة: $\frac{1}{\text{س} + 1}$ - $\frac{4}{1 - \text{س}4}$

الدكتورة سوسن سعيد الرحمن

4) $\frac{\text{جتاس}}{1 + \text{جاس}}$

5) $\text{س}^3 \times \frac{3}{\text{س}3}$ + لو 3س × $3\text{س}^2 = \text{س}^2 + 3\text{س}^2$ لو 3س = س^2 (1 + 3 لو 3س)

6) لو $\sqrt{1 + \text{س}}$ = $\frac{1}{2}$ لو(س + 1) ، والمشتقة: $\frac{1}{2(\text{س} + 1)}$

7) لو$(1 + \text{س}^2)^5 = 5$ لو$(1 + \text{س}^2)$ ، والمشتقة: 5 × $\frac{2\text{س}}{1 + \text{س}^2} = \frac{10\text{س}}{1 + \text{س}^2}$

مثال 2

هل مشتقة الدالة ص = لو 2س تساوي مشتقة الدالة ص = لو(-2س)؟

الحل

ص = لو 2س ∴ صَ = $\frac{2}{2\text{س}} = \frac{1}{\text{س}}$ ص = لو(-2س) ∴ صَ = $\frac{-2}{-2\text{س}} = \frac{1}{\text{س}}$

نعم، المشتقتان متساويتان ، وبصورة عامة: $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ لو(ك س) = $\frac{1}{\text{س}}$ لأي ثابت

ك ≠ 0

7-2 تكامل الدالة اللوغاريتمية

قاعدة

$\int \frac{1}{\text{س}}$ دس = لو | س | + ث

$\int \frac{1}{\text{أس} + \text{ب}}$ دس = $\frac{1}{\text{أ}}$ لو | أس + ب | + ث

وبصورة عامة: إذا كان البسط هو مشتقة المقام فإن

$\int \frac{\text{دَ(س)}}{\text{د(س)}}$ دس = لو | د(س) | + ث

مثال 3

أوجد: 1) $\int \frac{2}{س}$ دس 2) $\int \left(2 - \frac{1}{س}\right)$ دس

الحل

1) $\int 2$ س$^{-1}$ دس = **2 لو | س | + ث**

2) $\int 2$ دس $- \int \frac{1}{س}$ دس = **2س - لو | س | + ث**

مثال 4

أوجد ص في كل مما يأتي:

1) $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{3س + 1}$ 2) $\frac{دص}{دس} = \frac{5}{5س - 1}$ 3) $\frac{دص}{دس} = \frac{2}{3(2س - 1)}$

الحل

1) ص = $\int \frac{1}{3س + 1}$ دس = **$\frac{1}{3}$ لو | 3س + 1 | + ث**

2) ص = $\int \frac{5}{5س - 1}$ دس = $5 \times \frac{1}{-5}$ لو | 5س - 1 | + ث =

-لو | 5س - 1 | + ث

3) ص = $\int \frac{2}{3}$ دس = $\int \frac{1}{2س - 1}$ دس = $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ لو | 2س - 1 | + ث =

$\frac{1}{3}$ لو | 2س - 1 | + ث

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

مثال 5

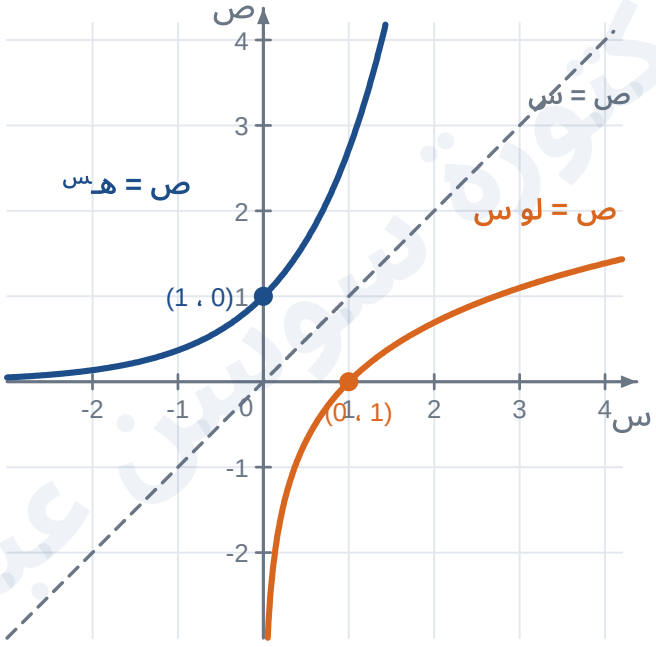
إذا كان لو أ = 4 ، لو ب = -2 ، فأوجد قيمة $\int_{1}^{\text{أب}} \frac{1}{\text{س}}$ دس

الحل

أ = هـ^{4} ، ب = هـ$^{-2}$ ∴ أب = هـ^{4} × هـ$^{-2}$ = هـ^{2}

$\int_{1}^{\text{هـ}^{2}} \frac{1}{\text{س}}$ دس = [لو س]$_{1}^{\text{هـ}^{2}}$ = لو هـ^{2} - لو 1 = 2 - 0 = **2**

7-3 الدالة الأسية الطبيعية



منحنيا هـ$^{\text{س}}$ و لو س متناظران حول المستقيم ص = س

الدكتور شوقي عبد الرحمن

خصائص الدالة الأسية الطبيعية

- هـ عدد غير نسبي، هـ ≈ 2.71828
- مجالها: جميع الأعداد الحقيقية ح
- مداها: الأعداد الحقيقية الموجبة فقط (هـ^{س} > 0 دائماً)
- يقطع منحناها محور الصادات في النقطة (0 ، 1)
- الدالتان هـ^{س} و لو س كل منهما عكسية للأخرى، ومنحناهما متناظران حول المستقيم ص = س

7-4 تفاضل الدالة الأسية

قاعدة

$\frac{د}{دس}$ هـ^{س} = هـ^{س} ، وبصورة عامة: $\frac{د}{دس}$ هـ$^{د(س)}$ = دَ(س) × هـ$^{د(س)}$

أي: تفاضل الأس × الدالة الأسية نفسها.

مثال 6

إذا كانت ص = هـ^{س} + هـ$^{-س}$ فأثبت أن: صً - ص = 0

الحل

صَ = هـ^{س} - هـ$^{-س}$ صً = هـ^{س} + هـ$^{-س}$

صً - ص = (هـ^{س} + هـ$^{-س}$) - (هـ^{س} + هـ$^{-س}$) = 0 ✓

مثال 7

أوجد مشتقة كل مما يأتي:

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

1) ص = هـ$^{\text{لو س}}$

2) ص = س هـ$^{\text{لو س}}$

3) ص = س^{3} هـ$^{\text{ظاس}}$

4) ص = هـ$^{2\text{س} + 1}$ لو س

5) ص = $\frac{\text{جتا6س}}{\text{هـ}^{3\text{س}}}$

6) ص = هـ$^{\text{لو جاس}}$

الحل

1) ص = هـ$^{\text{لو س}}$ = س ∴ **صَ = 1**

2) ص = س × س = س^{2} ∴ **صَ = 2س**

3) صَ = س^{3} × قا^{2}س هـ$^{\text{ظاس}}$ + هـ$^{\text{ظاس}}$ × 3س^{2} = **س^{2} هـ$^{\text{ظاس}}$ (س قا^{2}س + 3)**

4) صَ = هـ$^{2\text{س} + 1}$ × $\frac{1}{\text{س}}$ + لو س × 2هـ$^{2\text{س} + 1}$ = **هـ$^{2\text{س} + 1}$ $\left(\frac{1}{\text{س}} + 2 \text{ لو س}\right)$**

5) ص = جتا6س × هـ$^{-3\text{س}}$

صَ = جتا6س × (-3هـ$^{-3\text{س}}$) + هـ$^{-3\text{س}}$ × (-6 جا6س) =

-3هـ$^{-3\text{س}}$ (جتا6س + 2 جا6س)

6) ص = جاس ∴ **صَ = جتاس**

مثال 8

أوجد صَ عندما ص = س$^{\text{س}}$

الحل

نأخذ لو للطرفين: لو ص = س لو س

بالتفاضل الضمني: $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = س × $\frac{1}{\text{س}}$ + لو س × 1 = 1 + لو س

∴ **صَ = س$^{\text{س}}$ (1 + لو س)**

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

7-5 تكامل الدالة الأسية

قاعدة

$\int هـ^{س}\ دس = هـ^{س} + ث$ $\qquad$ $\int هـ^{أس + ب}\ دس = \frac{1}{أ}\ هـ^{أس + ب} + ث$

أي: الدالة الأسية نفسها × $\frac{1}{\text{تفاضل الأس}}$

مثال 9

أوجد التكاملات الآتية:

1) $\int 2هـ^{س}\ دس$ $\qquad$ 2) $\int (هـ^{4س} + هـ^{1 - س})\ دس$

3) $\int (هـ^{س} + هـ^{-س})^2\ دس$ $\qquad$ 4) $\int هـ^{4س + لو 2}\ دس$

الحل

1) $\boxed{2هـ^{س} + ث}$

2) $\frac{1}{4}\ هـ^{4س} + \frac{1}{1-}\ هـ^{1 - س} + ث = \boxed{\frac{1}{4}\ هـ^{4س} - هـ^{1 - س} + ث}$

3) $\int (هـ^{2س} + 2 + هـ^{-2س})\ دس = \boxed{\frac{1}{2}\ هـ^{2س} + 2س - \frac{1}{2}\ هـ^{-2س} + ث}$

4) $هـ^{4س + لو 2} = هـ^{4س} \times هـ^{لو 2} = 2\ هـ^{4س}$ ، إذن: $\int 2\ هـ^{4س}\ دس =$

$\boxed{\frac{1}{2}\ هـ^{4س} + ث}$

مثال 10 — مثال مهم

أوجد $\int \frac{هـ^{2س} - 4}{هـ^{س} - 2}\ دس$

الحل

البسط فرق بين مربعين: $هـ^{2س} - 4 = (هـ^{س} - 2)(هـ^{س} + 2)$

الدكتورة سوسن شيد الرحمن

$$\int \frac{(هـ^{س} - 2)(هـ^{س} + 2)}{هـ^{س} - 2} \, دس = \int (هـ^{س} + 2) \, دس = \boxed{هـ^{س} + 2س + ث}$$

تذكّر

إذا كانت ص = هـ^{س} فإن صَ = هـ^{س} و

$$\int هـ^{س} \, دس = هـ^{س} + ث$$

الدالة هـ^{س} هي الدالة الوحيدة التي مشتقتها وتكاملها يساويان الدالة نفسها (مع إضافة ثابت التكامل).

الدكتورة سوسن عبد الرحمن

✓ إجابات التمارين

الباب الأول: المصفوفات والمحددات

- **تمرين 1:** عدد صفوف ب = عدد أعمدة أ ∴ ن + 1 = 3 ∴ ن = 2 ، وعدد أعمدة ب = 4

  ∴ م + 5 = 4 ∴ م = -1 ، إذن $\frac{\text{م} + \text{ن}}{2} = \frac{1}{2}$

- **تمرين 2:** أ) 3س(2 - س) + 8 = -1 ∴ س^2 - 2س - 3 = 0 ∴ س = 3 أو س = -1

  ب) 5(س^2 + 1) - 42 = -17 ∴ س^2 = 4 ∴ س = ± 2

الباب الثاني: حساب المثلثات

- **تمرين 1:** جا(90° + أ) = جا90 جتاأ + جتا90 جاأ = جتاأ

الباب الخامس: التكامل وتطبيقاته

- **تمرين 1:** 1) ف = 3ن^2 + 1 2) ع = $\frac{2}{3}$ ن^3 ، ف = $\frac{1}{6}$ ن^4 + 2 3)

  ع = 12ن^2 + 1 ، ف = 4ن^3 + ن

الدكتورة سوسن عبد الرحمن