اقليم كردستان العراق الفيدرالي
وزارة التربية

الرياضيات

للصف الرابع الثانوي

﴿ المدارس الاسلامية ﴾

اقليم كوردستان العراق الفدرالي
وزارة التربية

الرياضيات

للصف الرابع الثانوي من المدارس الاسلامية

تاليف

الدكتور ساكن احمد فتحي

ابراهيم فاضل الدبو — قاسم محمد عبد الله

زهير ثابت عباس — نافع يحيى الفارس

١٤٢٦ هـ - ٢٠٧٥ كوردي - ٢٠٠٥ م

مطبعة الشموع - بغداد

الاشراف الفني على الطبع

صباح سعيد عبد الله
كريم مولود حمه صالح

الاشراف على الطبع

جلال عمر رمضان
ابراهيم اسماعيل حسن

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

تمشياً مع أهداف الثورة وخططها في حقل التربية والتعليم لتحديث المناهج والكتب للمراحل الدراسية كافة ، كلفنا من قبل وزارة التربية الجليلة بتأليف هذا الكتاب لطلاب الصف الرابع الثانوي في المدارس الاسلامية •

لقد وضعنا نصب أعيننا الاهداف المتوخاة في تدريس الرياضيات لطلاب المدارس الاسلامية ، وتقيدنا بالمفردات التي أقرت لتحقيقها وبعدد الساعات المقررة للرياضيات في هذا الصف •

احتوى الكتاب على فصل تناول تراث العرب العلمي في العصور الاسلامية في الرياضيات ، وفصل تناول بعض التطبيقات الرياضية في الزكاة والميراث ، بالاضافة الى فصول عن الأسس،المتتاليات،المجسمات والعمليات الاحصائية •

نأمل من زملائنا المدرسين موافاتنا بملاحظاتهم ، والتعاون معنا والكمال لله وحده وهو ولي التوفيق •

المؤلفون

الفصل الاول

الرياضيات في التراث العربي الاسلامي

منذ فجر التاريخ اشرقت شمس العلوم العربية على العالم ثم استمرت ترسل اشعتها في هذا الكون كي تنير الطريق امام الأجيال التالية فأوصلتها الى طريق انطلقت منه الى سلم التقدم • ان العرب هم الذين فتحوا لأوربا ما كانت تجهله من عالم المعارف العلمية والادبية وحتى الفلسفية منها وهم الذين وضعوا أساس بناء الحضارة الحالية •

لقد كان دور العرب مهما اوصل العلوم الى ما هي عليه الآن من ازدهار فكل جيل يقوم بدوره حينما يتسلم الراية من الجيل السابق ويضيف ويساهم في تقدم العلوم التي تعلمها من الجيل السابق له وهذه هي طبيعة الحياة،وهكذا بذل كل جيل مافي استطاعته الا ان الجهود التي بذلها كل جيل يصيب بعضها الفناء والاندثار بسبب طبيعة الحياة والحروب وجهل البعض بقيمتها وهكذا ضاعت بعض مآثر العرب الضخمة والمبتكرة والرائعة في العلوم ومنها الرياضيات لقد اصبح تاريخ العلوم ذا اهمية في السنين الأخيرة في الكثير من الجامعات ودخل في صلب دراستها لأنها تريد أن يطلع هذا الجيل على تفاصيل تطور العلوم وخصوصا الرياضيات لأن صرح الرياضيات لم يصل الى ما وصل اليه الا بفضل الاجيال السابقة وهو من جهة ثانية مهم لأرتباطه بالحضارة وتقدمها ولذلك قامت حركة ملحوظة في نشر التراث العربي وتحقيق امهات المخطوطات فنلاحظ حركة في كل من روسيا والمانيا وفي انكلترا اسس اكثر من معهد لدراسة المآثر العربية وفي جامعة هارفارد انشيء كرسي لتاريخ العلوم عند العرب وفي البلاد العربية هناك مساع وانجاهات قوية نحو التراث العربي فقد انشيء في مدينة حلب معهد لتراث العرب العلمي ويصدر المعهد ابحاثا ومنها ابحاث في تاريخ الرياضيات •

ان تاريخ العلوم عند العرب ومنها الرياضيات يربطنا ثقافيا بحضارتنا ويحثنا على العمل في سبيل التقدم والرقي والمساهمة مساهمة فعالة في الحضارة الحاليه .

ان تاريخ الرياضيات القديمة يستند الى أسانيد مختلفة بعضها منحوت على جدران الآثار والمعابد القديمة والمسلات وبعض الاوراق (أوراق البردي في وادي النيل) او بمخطوطات قديمة محفوظة في المكتبات وعلى لوحات طينية كما في وادي الرافدين ، قام العلماء بدراستها وتفسيرها لكي تزداد الحقائق الرياضية وضوحا ونقف على تلك الجهود الرائعة التي بذلها الاقدمون لتكون المثل الأعلى للشباب ولتكون حافزا لهم على المساهمة مساهمة فعالة في هذا المجال،فالامم تعني بتراثها العلمي لأنه الغذاء الروحي لعلمائها ومفكريها وسائر المتعلمين ونحن العرب اغنى الامم تراثا ، وقد جاء في مقدمة كتاب الخوارزمي (الجبر والمقابلة) . هذه الاسطر .

« لم يزل العلماء في الازمنة الخالية والامم الماضية يكتبون الكتب بما يصنفونه من صنوف العلم ووجوه الحكمة نظرا لما بعدهم واحتساب للأجر بقدر الطاقة ورجاء أن يلحقهم من اجر ذلك وذخره وذكره ويبقى لهم من لسان الصدق ما يصغر في جنبه كثير مما كانوا يتكلفونه من المؤونة ويحملون على انفسهم من المشقة في كشف اسرار العلم وغامضه ، اما رجل سبق الى مالم يكن مستخرجا فورثه من بعده واما رجل شرح مما ابقى الاولون ما كان مستغلقا فأوضح طريقه وسهل مسلكه وقرب مأخذه واما رجل وجد في بعض الكتب خللا فلم شعثه وأقام اوده وأحسن الظن بصاحبه غير راد عليه ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه » .

لقد كان الانسان العربي انسان فكر وعلم منذ التاريخ القديم ساهم في بناء حضارة ثقافية وعلمية أغنت الحضارة الانسانية وساعدت على تطورها فقد انشأ اجدادنا في وادي الرافدين ووادي النيل وفي فلسطين حضارات عريقة ومتقدمة مما يدل على قدرة الانسان العربي على التفكير والاستيعاب والتطور وقد اتبع العرب والمسلمون منهجا علميا مبرمجا ودقيقا وأكد الفكر العربي الاسلامي

القضية العلمية وأكد على العلم . وقد جاء في كتاب « ادب الدنيا والدين » للماوردي المتوفي (٤٥٠هـ) وهو من علماء بغداد .

« اعلم أن العلم اشرف مارغب فيه الراغب وافضل ما طلب وجد فيه الطالب وانفع ماكسبه واقتناه الكاسب لان شرفه ينم على صاحبه وفضله ينمى عند طالبه » . قال تعالى « هل يستوي الذين يعلمون والذين لايعلمون » فمنع سبحانه المساواة بين العالم **والجاهل** لما خص به العالم من فضلة العلم قال تعالى « ومايعقلها الاالعالمون»وقد جاء في الكتاب نفسه«اعلم أن للعلوم أوائل تؤدي الى اواخرها **ومداخل** تفضي الى حقائقها فليبتدأ طالب العلم بأوائلها لينتهي الى أواخرها وبمداخلها لينتهي الى حقائقها ولا يطلب الآخر قبل الأول ولا الحقيقة قبل المدخل فلا يدرك الآخر ولايعرف الحقيقة لأن البناء على غير أس لايبني والثمر من غير غرس لايجني» والحضارة العربية حلقة الاتصال بين الحضارة اليونانية والحضارة الحالية فهم الذين حفظوا علوم اليونان وحضارة وادي الرافدين القديمة وحضارة وادي النيل من الضياع وهم الذين نقلوها ونقلوا معها اضافاتها الكثيرة الى اوربا عن طريق الاندلس ولم يقفوا عند هذا الحد بل تعدوه الى ترقية ما أخذوه باذلين الجهد في تحسينه وانمائه حتى سلموه للعصور الحديثة . وقد اعترف علماء اوربا بذلك فقد قال احدهم ان نتاج افكارهم « أي العرب » الغزيرة ومخترعاتهم النفيسة تشهد أنهم اساتذة أهل أوربا في جميع الاشياء ولم يكن العرب نقلة للعلوم فحسب وهذا ما شهد به علماء اوربا ومنهم الدكتور « سارطون » الأمريكي حيث قال « ان بعض الغربيين يستخفون بما اسداه الشرق الى الغرب ويصرحون بأن العرب والمسلمين نقلوا العلوم القديمة ولم يضيفوا اليها شيء ما وهذا الرأي خطأ لو لم تنقل الينا كنوز الحكمة اليونانية لتوقف سير المدنية بضعة قرون ولذلك فان العرب كانوا أعظم معلمين في العالم » .

وقد اخذ العرب النظريات عن اليونان وفهموها وطبقوها على حالات كثيرة مختلفة ثم كونوا من ذلك نظريات جديدة وبحوثا مبتكره وهم بذلك

قدموا للعالم خدمات جليلة لاتقل عن الخدمات التي اتت من مجهـودات كبار رجال الاختراع في الغرب وقد توزعت مخطوطات العرب ومخطوطات من نقل عنهم ومن أرخ لهم في مكتبات العالم المختلفة وقد اورد (زونـز) في كتابـه رياضيو العرب وفلكيوهم واعمالهم مايزيد عن خمسمائة رياضي وفلكي ذاكرا اسماءهم وأنسابهم بالنطق العربي ذاكراً كتبهم ورسائلهم مشيرا الى أماكنهم الان ولا شك أن للعرب فضلا لا ينكر فيما يأتي :

١ ـ كانوا أمناء للكنوز الاغريقية التي نقلوها سليمة مزدهرة وانقذوها من الرومـان ٠

٢ ـ كانوا وسـيلة لأظهار كنوز العلوم الهندية التي ازدهرت في المشـرق في الوقت الذي ازدهرت فيه العلوم الاغريقية في المغرب ٠

٣ ـ وصـلوا بين العلوم الاغريقية والعـلوم الهندية ومزجوا بينها وسلموها سليمة نقية الى الغربين حينـما هبوا مـن سباتهـم وخلعوا عن اكتافهـم رداء الخمول وتزحوا الى الاندلس حيث جامعات اشبيلية وقرطبة وغرناطة ، والى غير الاندلس باحثين وراء العلوم وتعلموا اللغة العربية ونقلوا ما أخذوه من العرب الى اللغة اللاتينية ٠

٤ ـ اضافوا الى العلوم التي اخذوها من العرب فتوحات علمية زاهرة وكشوفا قيمة جديدة نسبت لغيرهم وظن انها كشفت بعدهم ٠

اثر العرب في علم الحساب :

ان الرياضيات من العلوم التي نالت اهتمام العرب وعنايتهم وقد برعوا فيها واضافوا اليها اضافات هامة أثارت اعجاب الآخرين ودهشتهم فاعترفوا بفضل العرب واثرهم الكبير وجهودهم الممتازه في حقل الرياضيات ومنها علم الحساب الذي له الأثر الكبير في الحياة العامة والخاصه والذي يعد من اهم العلوم التي استندت اليها الحضارة العربية في ابداعاتها الفكرية ٠

احس الانسان منذ اوائل عهده بالعيش على سطح الارض الى العد وزاد احساسه بالحاجة اليه منذ تجاوزت شؤونه الحيوية حدودها البدائية الأولى وأصبح له من الأخذ والعطاء والتعامل والارتباط بالآخرين مما لابد منه من حساب وتعداد •

وهكذا وضع الحجر الاساس لعلم الحساب في هدى هذه الحاجه الماسة وبدأت مسيرته الطويلة مواكبة مسيرة الانسان في تاريخه المديد العريق ويعد البابليون في مقدمة الامم القديمة التي عنيت بهذا العلم وأولته ما يستحقه من عناية ورعاية وكان من نتائج اهتمامهم هذا وضع عدد من القواعد والأنظمة الحسابية على نحو اثار اعجاب المعنيين خصوصا بعد أن ثبت بفضل التنقيبات المستمرة وما اسفرت عنه من حقائق ومعلومات •

برع العرب في الحساب واجادوا فيه واضافوا اليه اضافات هامة فقد اطلع العرب على حساب الهنود واخذوا عنهم نظام الترقيم اذ رأوا انه افضل من النظام الشائع عندهم وهو نظام الجمل وفي هذا النظام كان لكل حرف رقم خاص يدل عليه فكان الجدول كالاتي :

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠
ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ
١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠	٨٠٠	٩٠٠

(غ ١٠٠٠) •

وكان لدى الهنود اشكال عديدة للارقام أجرى العرب عليها تعديلا وتشذيبا ومنحوها من الذوق الانسيابية واللمسة الفنية ما جعل لها صورة متميزة وشكلا خاصا وطريقة معينة في الكتابة وربما كانوا يهدفون من هذا التحوير الى أن يجعلوا تلك الارقام أكثر شبها وقربا الى حروفهم وكونوا منها

سلسلتين عرفت احدهما بالارقام الهندية وهي التي تستعمل في العراق واكثر الاقطار الاسلامية والعربية وعرفت الثانية بالارقام الغبارية وقد انتشر استعمالها في المغرب وفي بلاد الاندلس • قال البيروني وهو من علماء العرب في القرن الحادي عشر : « ان الارقام الغبارية والهندية هي احسن ما عند الهنود » واكد أن هذه الارقام مختلفة باختلاف الجهات في الهند وأن العرب انتقوا منها مارأوه مناسبا واكتفى العرب بطريقتين لكتابة الارقام •

١) الطريقة الشرقية ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

٢) الطريقة الغربية 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

وقد فاقت الارقام العربية غيرها من الارقام بسبب وجود الصفر وطريقة كتابة العدد التي تقضي بأن تكون قيمة الرقم متغيرة بالنسبة لمنزلته اي انهم أوجدوا مراتب للارقام تكسب الرقم الواحد قيما مختلفة اذا وضع في مراتب مختلفة فالاربعة في العدد ٤٣ هي ٤ عشرات لأنها في المرتبة الثانية من اليمين والـ٤ في العدد ٣٤ هي اربعة فقط لأنها في المرتبة الاولى او مرتبة الآحاد • اما المنزلة الخالية فقد استعملوا لها الصفر • وللصفر فوائد كثيرة منها استعماله في حل المعادلات كما أن النظام العشري سهل كتابة الاعداد ومهما كانت كبيرة • فاذا اردنا كتابة العدد الف وتسعمائة وثمانية وسبعين نكتبه ١٩٧٨ أو 1978 وقد كانت اوربا تكتبه MCMLxxViii

ومن الاكيد أن العرب وضعوا علامة الكسر العشري فقد وضع الكاشي في القرن الخامس عشر النسبة التقريبية عند حسابها بالشكل الآتي ١٤١٥٠٠ ٣ صحيح وهذا الوضع يدل على أن المسلمين كانوا يعرفون شيئاً من الكسر العشري وانهم بذلك سبقوا الاوربين في استعمال الكسر العشري •

وقد وضع العرب مؤلفات كثيرة في الحساب وترجم الغربيون بعضها وتعلموا منها وكان لها الاثر الاكبر في تقدمه • وقد قسموا الحساب الى ابواب منها ما يتعلق بحساب الاعداد الصحيحة ومنها ما يتعلق بحساب الكسور

ويذكرون في كل منها اعمالا مختلفة يضعونها في فصول مختلفة باسلوبهم الخاص في اجراء العمليات ومنها ما هو خاص بالمبتدئين •

وبحثوا في الاعداد وانواعها وخواصها وقد توصلوا الى نتائج هامه واستعملوا مسائل يجد من يحاول حلها ما يشحذ الذهن •

وقد بحثوا في الاعداد المتحابة والمتاليات العددية والهندسية وقوانينها وهذه الاعداد المتحابه تكون ازواجا مثل (٢٢٠ ، ٢٨٤) ونجد هنا انمجموع عوامل ال ٢٢٠ يساوي ٢٨٤ ومجموع عوامل ال ٢٨٤ يساوي ٢٢٠ •وتوسع العرب في بحوث النسبة وقالوا انها على ثلاثة انواع العددية او الحسابية والهندسية والتآلفية أو الموسيقية فالحسابية أو العددية مثل ٣ ، ٧ ، ١١ ، ٠٠٠ والهندسية مثل ٣ ، ١٥ ، ٤٥ ، ٠٠٠ اما التآلفية فهي الاعداد التي يكون فيها الفرق بين العدد الاول والثاني بالنسبة للاول يساوي الفرق بين الثاني والثالث بالنسبة للثالث مثل ١٢ ، ٨ ، ٦

$$\frac{12-8}{12} = \frac{8-6}{6} = \frac{1}{3}$$

وبحثوا في الأعداد التامة والناقصة والزائدة فالعدد التام هو ما يساوي مجموع عواملة مثل العدد ٦ فان عوامله ١ ،٢ ، ٣ وكذلك العدد ٢٨ ، أما العدد الزائد فهو العدد الذي مجموع عوامله أكبر من العدد نفسه مثل١٢ فانمجموع عوامله ١٦ والعدد ١٠ عدداً ناقصاً فان مجموع عوامله ٨ •

وقد أجادوا في موضوعات التناسب وكيفية أستخراج المجهول وتوصلوا الى بعض خواص النسبة اما في الكسور فان طرق العرب لاتختلف عن الطرق المعروفةالآنوكانوا يكثرون من الأمثلةوالتمارين في مؤلفاتهمويأتونبمسائل عملية تتناول ماكان يقتضيه العصر ويدور على المعاملات التجارية والرواتب والزكاة وتقسيم الميراث •

ولم يقف العرب عند هذا الحد بل اخذوا الأعداد وتعمقوا في نظرياتها وأنواعها وخواصها فقالوا ما من عدد الا وله خاصيته اوعدة خواص ومعنى الخاصية انها الصفة المخصوصة للموصوف الذي لا يشارك فيها غيره فخاصية الواحد انه أصل العدد ومنشؤه وهو يعد العدد كله ومن خاصية الاثنين أنه أول العدد مطلقاً ويعد نصف العدد الأزواج دون الأفراد ، ومن خاصية الثلاثة أنها أول عدد الأفراد وهي تعد ثلث الأعداد تارة الأفراد وتارة الازواج ومن خاصية الاربعة أنها أول عدد مجذور •

وقد تبين أن العرب كانوا يستعينون بقوانين الحساب ومبادئه في حل مسائل العلوم الطبيعية والمثلثات والفلك •

كما اتى العرب على قواعد لاستخراج الجذور واستطاع العرب ايجاد القيمة التقريبية للجذر الاصم وقواعد لجمع المتواليات والمكعبات وتوصلوا الى نتائج طريفة •

وكان ثابت بن قرة المتوفى في بغداد (٢٨٨ هـ) أول من كتب عن المربعات السحرية التي اذا جمعت فيها أي صف أو عمود أو قطر فان النواتج متساوية•

٦	٧	٢
١	٥	٩
٨	٣	٤

المجموع ١٥

١	١٥	١٤	٤
١٢	٦	٧	٩
٨	١٠	١١	٥
١٣	٣	٢	١٦

المجموع ٣٤

هذا بعض مآثر العرب في هذا العلم الأساسي في الرياضيات ومن يدرس مؤلفاتهم يجد الأبداع ويقدر الجهود الطيبة التي قدموها للانسانية في هذا المجال •

مآثر العرب في الجبر

ان اول من اطلق لفظ الجبر على العلم المعروف بهذا الاسم في جميع اللغات (ALgebra) هم العرب وهم اول من الف فيه بصورة علمية منظمة ويقصد بالجبر نقل الحدود من احد طرفي المعادلة الى الطرف الآخر .

واول من الف فيه هو محمد بن موسى الخوارزمي في زمن الخليفة العباسي المأمون وسماه الجبر والمقابلة ويقصد بالمقابلة اختصار ما يجوز اختصاره بعد عملية الجبر ثم ايجاد النتيجة وقد كان هذا الكتاب منهلا نهل منه العرب واوربا على السواء واعتمدوا عليه في بحوثهم واخذوا منه كثيراً من النظريات وكان له الأثر الكبير في تقدم علم الجبر . وقد نشره الغربيون وعلقوا عليه ومن هنا يتبين اهمية هذا الكتاب واعترف علماء الغرب بما قدمه العرب في الجبر فقال احدهم « ان العقل ليدهش عندما يرى ماعمله العرب في الجبر » .

استعمل بعض علماء العرب الرموز بعد الخوارزمي في الاعمال الرياضية وسبقوا الغربيين في هذا المضمار ومن يتصفح مؤلفات القلصادي المولود في الاندلس والمتوفى في تولس سنة (٨٩١ هـ ، ١٤٨٦ م) يجد انه قد استعمل لعلامة الجذر الحرف حـ الحرف الاول من كلمة جذر وللمجهول الحرف الاول من كلمة شيء (ش) يعني (س) وللمربع المجهول الحرف الاول من كلمة مال (مـ) أي $س^{٢}$.

ولكعب المجهول الحرف الاول من كلمة كعب (ك) اي $س^{٣}$ ولعلامة المساواة الحرف (ل) أي ما يقابل وللنسبة ثلاث نقط ∴ فالمعادلة $٥س^{٢} = ٢س + ٥٤$ كانت تكتب ٥ مـ ل ٢ ش٥٤ وان $\frac{جـ}{٤٩}$ تعني $\sqrt{٤٩}$ ولا يخفى ما لاستعمال الرموز من أثر بليغ في تقدم الرياضيات العالية على اختلاف فروعها .

وظم ابن الياسمين الذي مات في مراكش في سنة ٦٠١ هـ ارجوزه في في الجبر منها

على ثلاثـــة يـــدور الجبر — المال والاعـــداد ثم الجـذر

فالمـال كـل عـــدد مربـع — وجذره واحـد تلك الأضـــلع

والعدد المطلق مالـم ينسب — للمـال او للجذر فأفهم تصـب

والجذر والشيء بمعنى واحد — كالقـول في لفظ أب ووالـد

وحل العرب بعض معادلات الدرجة الأولى بطريقة تختلف عمن سبقهم من الهنود وكذلك حل العرب معادلات الدرجة الثانية فقد قسم العرب المعادلات من الدرجة الثانية الى ستة أقسام ووضعوا حلولاً لكل منها وعرفوا ان لمعادلة هذه الدرجة جذرين موجبين •

وقد أتى الخوارزمي بطرق هندسية مبتكرة في حـل بعض المعادلات من الدرجة الثانية ، وكذلك حل العرب معـادلات الدرجـة الثالثة فقد حـل بعض علمائهم معادلات تكعيبية مثل $س^{٣}+ص^{٣}=ط^{٢}$ ، $س^{٣}-س^{٢}=ق$ • وقد وردت في رسائل سنان بن أبي الفتـح من علمـاء القرن الثالث للهجرة معادلات من الدرجة الرابعة وكذلك حل عمر الخيام الشاعر المعروف والمتوفى (١١٢٣ م) معادلات أخـــرى •

وقد قسم العرب المعادلات الى أشكال عديدة وحلوا المعادلات التكعيبية بواسطة قطوع المخروط وهومن الأعمال العظيمة التي قام بها العرب وحلوا بعض المسائل التي يؤدي حلها الى معادلات تكعيبية وأعطى ثابت بن قرة المتوفى في بغداد سنة ٢٨٨ هـ حلولاً هندسية لبعض المعادلات التكعيبية وأستخدم العرب الجبر في بعض الأعمال الهندسية وهم بذلك وضعوا أساس الهندسة التحليلية ومهدوا بذلك لعلم التفاضل والتكامل وعني العرب بالمعادلات غير المعينة وقد أخذوها من الأمم السابقة وتوسعوا فيها وحلوا كثيراً من المسائل التي تؤدي الى معادلات غير معينة أطلقوا عليها المسائل السيالة وكل معادلة من هذا النوع يكون لهـا عـدة أجوبة تحققها •

وقد بحث العرب في نظرية ذي الحدين من درجة أعلى من الدرجة الثانية فقد فك اقليدس مقداراً جبرياً ذا حدين أسه اثنان اما كيفية ايجاد مفكوك أي

مقدار جبري ذي حدين مرفوع الى قوة أسها أكثر من أثنين فلم تظهر الا في جبر عمر الخيام وقد قام الكرجي أو الكرخي من رياضي القرن الخامس للهجرة بترتيب جدول لمعاملات مفكوك ذي الحدين ترى صورته الآتية .

١

١ ١

١ ٢ ١

١ ٣ ٣ ١

١ ٤ ٦ ٤ ١

وقد مهد العرب لاكتشاف اللوغاريتمات فقد توصل بن يونس المصري المتوفي سنة ١٠٠٩م الى القانون الآتي :

حتا س حتا ص = ½ حتا (س + ص) + ½ حتا (س − ص) وكان لهذا القانون أهمية كبيرة قبل أكتشاف اللوغارتمات عند علماء الفلك في تحويل العمليات المعقدة لضرب العوامل الى عمليات جمع ، وقد وضع أحد علماء العرب (سنان بن أبي الفتح) من علماء القرن الثالث للهجرة كتاباً شرح فيه الطريقة التي يمكن بواسطتها اجراء الأعمال الحسابية التي تتعلق بالضرب والقسمة بواسطة الجمع والطرح . وهذا عين ما نعمله في اللوغارتمات وبحث العرب بالمتواليات العددية والهندسية واوجدوا قانوناً لأيجاد مجموع الأعداد الطبيعية المرفوع كل منها الى القوة الرابعة وبرهنوا ان ١ + ٢ + ٣ + ٤ ....

$= \frac{ن}{٢} (ن + ١)$ ومجموع مربعات الأعداد الطبيعية ومكعباتها ،

فقد أستطاع الكاشي المتوفى في القرن الخامس عشر للميلاد أيجاد قانون مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة الى القوة الرابعة . وقد عنوا بالجذور الصم ومنهم أخذ الغرب هذا الأسم وقد وجدوا طرقاً جبرية تدل على قوة الفكر وسعة العقل ووقوف تام على الجبر ، وقد أستعملوا طرقاً خاصة لأيجاد القيم التقريبية

للجذور الصم ، وكشفوا النظرية القائلة بأن مجموع مكعبين لا يكون مكعباً .

وألف العرب كتباً كثيرة في الجبر وشرحوا الكتب الأخرى ومنهم من نظم الأراجيز في هذا العلم فقد نظم محمد بن عبدالله المعروف بابن الياسمين المغربي أرجوزه في طرق حل المعادلات من الدرجة الثانية والآبيات الآتية بعض أبيات ارجوزته التي تشرح ما نسميه الآن طريقة أكمال المربع في حل معادلات الدرجة الثانيـــة .

فربع النصف من الأشياء — واحمل على الاعداد بأعتناء
وخذ من الذي تناهى جذره — ثم انقص التنصيف تفهم سره
فما بقى فذاك جذر المال — وهذه رابعة الأحـوال

ويقصد برابعة الاحوال الحالة التي تكـون مـربع المجهول مضافا اليه أمثال للمجهول تعدل عددا مثل $س^{٢}$ + ١٠س + ٧٥

هذا غيـض من فيض مما قام به اجدادكـم في هذا المجال فكونوا خير خـلف لخير سلف .

مآثر العرب في الهندسة

كان وادي الرافدين احـد عروش المجتمع في العصـور الاولى وقـد عثر الباحثون على لوحـات رياضـية وفلكية مكتوبـة بالخط المسـماري وتوالت الدراسات عن رياضيات البابليين وفلكهـم وقد تبين انهـم عرفوا مسـاحات الاشكال كالمستطيل والمثلث المتساوي الساقين والمثلث القائم الزاوية وشـبه المنحرف والدائره ونظرية فيثاغورس ومعرفة بمبدأ تشابه المثلثات .

وفي وادي النيل عرفوا الحجوم والمساحات وحجم المكعب والاسطوانة الدائرية القائمة ودلت الاثار على انهم كانوا على علـم كبير في الهندسـة وقـد استعملوا القانون .

$$\sqrt{\text{ح}(\text{ح}-\text{أ})(\text{ح}-\text{ب})(\text{ح}-\text{حـ})}$$

لأيجاد مساحة المثلث المختلف الاضلاع .

اخذ اليونان الهندسة عن الامم التي سبقتهم ودرسوها درسا علميا واضافوا اليها اضافات كثيرة واول من كتب منهم في هذا الموضوع اقليدس (٣٠٠ قبل الميلاد) وقد عرف كتابة باسم كتاب اقليدس ويسمى عند العرب (كتاب الاصول) او كتاب الاركان .

نهض العرب نهضتهم واخذوا كتاب اقليدس كما اخذوا غيره من الكتب وترجموه الى اللغة العربية ودرسوه دراسة شاملة وافية فشرحه بعضهم واختصره اخرون كما زادوا على نظرياته وابتكروا مسائل هندسية جديدة .

وتفننوا في كيفية حلها والفوا على نسقه وادخلوا في مؤلفاتهم قضايا جديدة لم يعرفها القدماء تعتبر أبحاثا قيمة في هذا المضمار . وساهم العرب مساهمة فعالة في محاولات البرهان على المسلمة الخامسة لأقليدس وهي (اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعة على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين فان المستقيمين يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع اذا مد الى غير حد) .

ان المحاولات التي بذلت لبرهنة المسلمة الخامسة لم تذهب سدى بل عملت على تقدم الرياضيات ومن العرب الذين حاولوا البرهنة على المسلمة الخامسة عمر الخيام الشاعر المعروف وقد لعبت دراسته في هذا المجال دورا مهما في بناء الهندسة اللااقليدية وهي الهندسة التي تختلف عن هندسة اقليدس بكونها لاتأخذ المسلمة الخامسة وبهذا يعتبر الخيام ممن مهد لبناء الهندسة اللااقليدية .

لم يعرف الاوربيون الهندسة الا عن طريق العرب ولولاهم لضاعت جميع الجهود التي بذلت فيها فقد درس الراهب (:ادلراف باث:)Adelord of Batt في مدارس غرناطه وقرطبة واشبيلية في الاندلس وكتب مقالا في الهندسة باللاتينية من نسخة ترجمت عن ترجمة اقليدس في العربية وكذلك كتب البابا سلفنتز الثاني (٩٧٩م) مقالا في الهندسه ولم يكن كتاب اقليدس معروفا الا في

العربيه وقد بقيت النسخة المترجمة عن العربية حتى سنة ١٥٨٣ م حينما كشف اصل هندسة اقليدس ومن الكتب التي ألفها العرب في علم الهندسة كتاب المساحة والهندسة لأبي كامل شجاع الحاسب المصري من علماء القرن الثالث للهجره بين (٨٥٠م ـ ٩٣٠م) وقد ترجم الى الايطاليه وكتاب اغراض اقليدس ليعقوب ابن أسحق الكندي المتوفى سنة ٨٧٣م والذي الف كتبا اخرى منها كتاب اصلاح اقليدس وكتاب صنعة الاسطرلاب بالهندسة . والف ثابت بن قرة كتاباً في استخراج المسائل الهندسية وكتابا في الاشكال المسطحة والاشكال المجسمة وله مقالة في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية وكتب ابو الوفا البوزجاني المتوفي ٩٩٨م كتابا في الاعمال الهندسيه جعله ثلاثة عشر باباً سماه « كتاب في الاعمال الهندسيه » .

وقد بحث العرب ايضا في تقسيم الزاوية الى ثلاثة اقسام متساوية ورسم المضلعات المنتظمة وربطها بمعادلات جبرية وفي محيط الدائره وغير ذلك مما يتعلق بالموضوعات التي تحتاج الى استعمال الهندسة .

وكان العرب يطبقون الهندسة في الاغراض العملية من شوؤنهم الحياتية وسخر العرب الهندسة المستوية والمجسمة في بحوث الضوء فقد استخدم ابن الهيثم المتوفى سنة ١٠٣٨ م الهندسة في البحوث القيمة التي بحثها في الضوء

وقسم العرب الهندسة الى قسمين الاولى الهندسة الحسية وقالوا انها تؤدي الى الحذق في الصناعة كلها وخاصة في المساحة ، والهندسة العقلية وقالوا انها تؤدي الى الحذق في الصنائع العلمية .

هذا بعض ما قام به العرب والمسلمون في هذا المجال ومن يقرأ كتبهم ويدرسها يجد أنهم قدموا خدمة جليلة في هذا الموضوع .

مآثر العرب في علم المثلثات

عرف هذا العلم عند العرب بعلم الانساب وذلك لأستناده الى الأوجه المختلفة الناشئة من النسبة بين أضلاع المثلث واليهم يعود الفضل في جعله علماً

منظماً له قوانينه الخاصة وعلماً مستقلاً عن الفلك ذلك أن اليونانيين اعتبروه علماً مساعداً على أعمالهم الفلكية .

وقد أضاف العرب أضافات هامة ودرسوا هذا العلم دراسة ممتازة عن الأمم التي سبقتهم وبذلك أعتبر هذا العلم عربياً اذ لو لاهم لما وصل هذا العلم الى ما هو عليه الآن .

أستعمل العرب النسبة المثلثية بدلاً من الأصطلاح « وتر ضعف القوس » الذي أستعمله اليونانيون وبذلك سهلوا الأعمال الرياضية وهم أول من أدخل (المماس – الظل) في عداد النسب المثلثية وكذلك ظل التمام .

وقد توصل العرب الى أستخراج القواعد المتعلقة بالمثلثات الكروية القائمة وحل المسائل المتعلقة بالمثلثات الكروية المائلة وكذلك مساحة المثلثات الكروية واوجدوا الجداول الرياضية للجيب والظل والقاطع التمام وأستعملوا طرقاً متنوعة لحساب هذه الجداول ووضعوا معادلات وأشكالاً لحل المشاكل التي صادفتهم في المثلثات .

وكشفوا المتطابقات في المثلثات مثل المتطابقات .

$$\text{٢ حا}^{٢} \frac{\text{س}}{\text{٢}} = \text{١} - \text{جتا س}$$

$$\text{حا س} = \text{٢ حا } \frac{\text{س}}{\text{٢}} \text{ جتا } \frac{\text{س}}{\text{٢}}$$

$$\text{قاس} = \sqrt{\text{١} + \text{ظا}^{٢} \text{ س}}$$

وغيرها من المتطابقات وقد توصل بن يونس الى القانون .

$$\text{حا س جتا ص} = \tfrac{1}{2} \text{ جتا (س + ص)} + \tfrac{1}{2} \text{ جتا (س − ص)}$$

وألف جابر بن الافلـح المتوفى في قرطبة في منتصف القرن الثاني عشر للميلادتسعة كتب في الفلك أولها في علم المثلثات الكروية .

وقـد أطلـع الأوربيون على كتب العرب في المثلثات ونقلوهـا الى لغتهم ونسبوا بعضها أليهم وقد ثبت أنها من وضع المسلمين والعرب وأنهم سبقوهم اليها ويعتبر البتاني « أبو عبدالله محمد بن جابر بن سنان » المتوفى سنة ٩٢٩م من العلماء الذين ساعدوا على أن يصبح علم المثلثات علماً مستقلاً وكذلك أبو الوفاء اليوزجاني (٩٤٠م - ٩٩٨م) فقـد أقترن اسـمه على وجـه الخصوص بتسمية حساب المثلثات .

وكذلك نبغ أبن يونس المصري (١٠٠٩ م) في علم المثلثات وتوصل الى قانونه الذي ذكرناه سـابقاً وكان لهـذا القانون أهميـة كبرى قبل أكتشـاف اللوغارتمات .

ساهم العرب في هذا العلم وفي كل العلوم وقدموا للعالم خدمات جليلة وما زالوا يقدمون ويساهمون في بناء الحضارة الأنسانية وهذه ذكرى و (انما يذكر أولـو الألباب) .

الفصل الثاني

تطبيقات في مواضيع الميراث والزكاة والخراج

تمهيد : الميراث :

تطلق كلمة الميراث ويراد بها المعاني التالية :

المعنى الاول :

علم الميراث . وهو القواعد الفقهية والضوابط الحسابية التي يعرف بها نصيب كل وارث من التركة .

المعنى الثاني : المال الموروث .

المعنى الثالث : الوراثة أو الارث ، أي كون الشخص مستحقاً نصيباً في تركة المتوفى ، وهذا المعنى هو المعنى بهذه الدراسة (١) .

الوارث :

وهو الشخص الذي ينتمي الى المورث (المتوفى) بسبب من أسباب الارث ويكون حياً عند وفاة المورث .

آيات المواريث :

قال الله تعالى : «يوصيكم الله في أولادكم للذكر مثل حظ الانثيين فان كنّ نساءً فوق اثنتين فلهن ثلثا ما ترك وان كانت واحدة فلها النصف ولابويه لكل واحد منهما السدس مما ترك ان كان له ولدٌ ، فان لم يكن له ولدٌ وورثه أبواه ، فلأمه الثلث فان كان له اخوة فلأمه السدس من بعد وصية يوصي بها أو دين ، اباؤكم وأبناؤكم لاتدرون أيهم أقربُ لكم نفعاً فريضة من لله ان الله كان عليماً حكيماً (٢) .

---

(١) الأحوال الشخصية في الفقه والقضاء للدكتور احمد الكبيسي ٨٤/٢

(٢) آية سورة النساء

« ولكم نصف ماترك ازواجكم ان لم يكن لهن ولد ، فان كان لهن ولد فلكم الربع مما تركن من بعد وصية يوصين بها أو دين ، ولهن الربع مما تركتم ان لم يكن لكم ولد ، فان كان لكم ولد فلهن الثمن مما تركتم من بعد وصية توصون بها أو دين ، وان كان رجل يورث كلالة أو أمرأة وله أخ أو أخت فلكل واحد منهما السدس ، فان كانوا اكثر من ذلك فهم شركاء في الثلث من بعد وصية يوصي بها أو دين غير مضار،وصيه من الله والله عليم حليم» .(1)

مراتب الورثة :ـ

والورثة على مراتب ، يفضل الاقرب صلة بالمتوفى على غيره ومراتبهم تكون على التسلسل الاتي : ـ

أولا : ـ

أصحاب الفروض : ـ وهم أثنا عشر :الازواج الزوجات والاب والام والبنات وبنات الابن والجد الصحيح والجدة الصحيحة ، والاخوات الشقيقات والاخوات لاب والاخوة لأم والاخوات لام .

ثانيا : ـ العصبة : ـ

وهم أقارب الميت من الذكور ومن ينزل منزلتهم من الاناث الذين لاتتوسط بينهم وبين الميت أنثى . ويطلق على هذا النوع من العصبة ، العصبة النسبية (٢)

ثالثاً : ـ ذووالرد : ـ

ونعني بالرد ، صرف الفائض من التركة بعد أن يأخذ أصحاب الفروض نصيبهم وينعدم العصبة الى أصحاب الفروض النسبية بنسبة فروضهم .

رابعاً : ـ ذووالارحام : ـ

وهم الذين ليسوا باصحاب الفروض والعصبات،ويدلون الى الميت بقرابة. بواسطة أنثى،وذلك كأبن البنت ، وبنت البنت وابن الاخت،هذا واننا سنقتصر

(١) أية ١٢ سورة النساء
(٢) أحكام التركات والمواريث للأستاذ محمد أبوزهرة ص ١٨١

في بحثنا هذا على الصنفين الاولين ، آملين أن يدرس ابناؤنا الطلبه بقية الموضوع في مرحلة دراسية قادمة بأذن الله •

الارث بالفرض :ـ

والفرض هو المقدار المعين شرعاً لكل وارث من التركة ويسمى بالسهم والنصيب والفروض المقررة في كتاب الله ستة ، النصف والربع والثمن والثلثان والثلث والسدس •

ولنبدأ بنصيب كل وارث من أصحاب الفروض موضحين حالة كل منهم ، ممثلين لبعض حالاتهم بامثلة تطبيقية •

١ ـ الزوج : وله في الارث من زوجته حالتان :

الاولى : ـ يأخذ النصف اذا لم يكن للزوجة فرع وارث كالابن وابنه والبنت وبنت الابن وان نزل أبوها •

الثانية : ـ يأخذ الربع عند وجود فرع وارث ممن ذكرناهم في الحالة الاولى

المثال :ـ

اذا ماتت زوجة وتركت زوجاً واختاً لها شقيقة فللزوج النصف وللاخت الشقيقة النصف أيضاً ، ولو انها تركت مبلغا من المال قدره الف دينار فان للزوج خمسمائة دينار وللاخت خمسمائة ايضاً •

وتحل المسألة على هذا النحو :ـ

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (٢) التركة ١٠٠٠ دينار
زوج	$\frac{1}{2}$	١	٥٠٠ دينار
أخت شقيقة	$\frac{1}{2}$	١	٥٠٠ دينار

ولو أن الزوجة كانت قد خلفت أبناً مع زوجها ، فللزوج الربع في هذه الحالة ، وللابن الباقي بالتعصيب •

٢ ـ الزوجة :ـ ولها في الارث من زوجها حالتان :

الاولى : تأخذ الربع اذا لم يكن للزوج فرع وارث •

الثانية : ــ الثمن أذا كان للزوج وارث كالابن وابنه وبنته .
المثال : ــ

اذا مات رجل وترك زوجة وعماً ، فللزوجة الربع وللعم الباقي تعصيباً . فلو كانت التركة اربعمائة دينار فللزوجة مائة دينار وللعم ثلثمائة .
وتحل للمسألة على الوجه الأتي : ــ

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة(٤) التركة ٤٠٠ دينار
زوجة	$\frac{1}{4}$	١	١٠٠ دينار
عم	الباقي	٣	٣٠٠ دينار

ولو ان الزوج كان قد ترك إبناً بالاضافة الى زوجته ، فان نصيب الزوجة الثمن ، والباقي للابن تعصيباً . فلو أن المال الموروث كان ستمائة دينار ، فان نصيب الام منه يكون مائة وللبنت النصف ثلثمائة وللاب مائتان . مائة بطريق الفرض والاخرى بطريق التعصيب .

٣ ــ الاب : ــ وله من ولده المتوفى ثلاث حالات .

الاولى : يأخذ السدس اذا كان للولد المتوفى فرع وارث ذكر .

ثانياً ــ يرث بطريقة الفرض والتعصيب معاً ، فيأخذ السدس فرضاً ويأخذ الباقي لانه عصبة ، وذلك عند وجود الفرع الوارث المؤنث .

ثالثا : ــ أرثه بالتعصيب فقط وذلك اذا لم يكن هناك فرع وارث مطلقاً لا مذكر ولا مؤنث .

المثال : اذا مات رجل وترك أماً وبنتاً وأباً ، كان للام السدس وللبنت النصف وللاب السدس فرضاً والباقي تعصيباً . وهي حالته الثانية وتحل المسألة كما يلي : ــ

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (٦) التركة ٦٠٠ دينار
أم	١/٦	١	١٠٠ دينار
بنت	١/٢	٣	٣٠٠ دينار
أب	١/٦ + الباقي ١ + ١ = ٢		٢٠٠ دينار

أما لو توفي عن ابن وأب ، فللاب السدس وللابن الباقي .

ولو ان امرأة ماتت وتركت زوجاً وأباً ، فان للزوج النصف وللاب الباقي تعصيباً . ولـو مات رجل وترك أباً وابن بنت ، كان لـلاب كل التركة بطريق التعصيب ، ولا شيء لابن البنت ، لانه من ذوي الارحام .

٤ ـ الجد الصحيح : وهـو الذي لاتتوسـط بينه وبين الميت أنثى ، والمقصود به أب الأب وأن علا ، ويقابله الجد القاصر وهو أبو أم الأم وأن علا. والجد الصحيح لاميراث له مع وجود الأب ، الا انه عند فقده ينوب منابه وعلى هذا فان أحوال الجد في الميراث هي الاحوال التي مر ذكرها نفسها في الاب على ان الجد يفترق عن الاب في بعض المسائل التي لا مجال لذكرها هنا .

المثال :ـ لو توفي رجل وترك جداً صحيحاً وأبناً، فان الجد يأخذ السدس، والباقي للابن تعصيباً ، فلو كانت التركة ثلثمائة دينار فان نصيب الجد منها خمسون ديناراً وما تبقى من المال للابن وتحل المسألة على الوجه الآتـي .

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (٦) التركة ٣٠٠ دينار
جـد	١/٦	١	٥٠ دينار
ابن	الباقي	٥	٢٥٠ دينار

٥ ـ الأم :ـ ولاتكون الا صاحبة فرض ، فلا تكون عصبة قط .

وللأم احوال ثلاث :ـ

أولاً ـ لها السدس في صورتين •

أ ـ اذا كان في الورثة فرع وارث مطلقاً ، ذكراً كان أم أنثى ، كما لو توفى عن أم وزوجة وبنت •

ب ـ ان يكون هناك جمع من الاخوة او الاخوات أثنان فأكثر ، كما لو ماتت عن أم وأختين شقيقتين •

ثانياً ـ تأخذ ثلث التركة كلها وذلك عند فقدان من ذكرناهم في الحالة الاولى من الوارثين كما لو مات عن أم وزوجة •

ثالثاً ـ تأخذ ثلث الباقي بعد نصيب أحد الزوجين في مسألتين فقط تسمى الغرّاوين لشهرتها •

المسألة الأولى :ـ ان يكون في الورثة زوج وأم وأب • فالنصف نصيب الزوج والام ثلث الباقي بعد النصف والاب يأخذ الباقي النهائي •

المسألة الثانية :ـ أن يكون في الورثة زوجة وأم وأب فللزوجة الربع والام تستحق ثلث الباقي بعد الربع ، والاب يستحق الباقي النهائي •

وتحل الصورة الاولى من الغراوين على الوجه الآتي :ـ

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (٦)
زوج	½	٣	
أم	⅓ الباقي	١	
أب	الباقي	٢	

فلو كانت التركة الفاً ومائتي دينار فان نصيب الزوج منها ستمائة دينار وللام ثلث الباقي مائتا دينار وماتبقى من المال يكون نصيب الاب •

أما الصورة الثانية فتحل على النحو الاتي :ـ

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (٤)
زوجة	$\frac{1}{4}$	١	
أم	$\frac{1}{3}$ الباقي	١	
أب	الباقي	٢	

فلو كان المال الموروث اربعمائة دينار فنصيب الزوجة منه مائة وللام ثلث الباقي مائة ايضاً وللاب الباقي مائتا دينار

٦ ـ الجدة الصحيحة :ـ وهي التي لا يتوسط بينها وبين الميت جد غير صحيح فأم الأم جدة صحيحة ، وأم الأب كذلك وهكذا . وغير الصحيحة : هي التي يتوسط بينها وبين الميت جد غير صحيح كأم ابي الأم ، فانها ليست من اصحاب الفروض ، بل من ذوي الارحام . وللجدة الصحيحة حالتان :ـ

الاولى :ـ أن ترث السدس وتنفرد به الواحدة ، ويشترك فيه الاكثر من واحدة فاذا توفي شخص عن أم أم ، فلها السدس ، ولو كان معها أم أب ، اشتركتا في السدس أيضاً .

الثانية : حجبها من الميراث في الحالات الآتية :

أ ـ عند وجود الام .

ب ـ الجدات الابويات يحجبن بالاب ، والمقصود بالابويات اللواتي يدلين بواسطة الاب . فعلى هذا يحجب الاب أم الأب ولا يحجب ام الام ولو علت درجتها .

جـ ـ أن الجدة القريبة تحجب الجدة البعيدة من اية جهة كانت فلو فرض أن توفى شخص وترك أم أب وأم أم ، فالسدس لام الاب ولا شيء للجدة الثانية . واذا توفى عن أم أم ، وأم أبي أب ، فالسدس لام الام ولا شيء للاخرى .

مثال : ـ توريث الجدة .

: لو توفيت أمرأة وتركت زوجاً وجدة للام وأخاً شقيقاً فان نصيب الزوج النصف والجدة السدس والباقي للاخ تعصيباً فلو كانت التركة ستمائة دينار فان نصيب الزوج يكون ثلثمائة ونصيب الجدة مائة،وما تبقى من المال يكون معه الاخ الشقيق . فالمسألة تحل على الوجه الآتي :

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (٦) التركة ٦٠٠ دينار
زوج	½	٣	٣٠٠ دينار
جدة لام	⅙	١	١٠٠ دينار
اخ شقيق	الباقي	٢	٢٠٠ دينار

أما مثال حرمانها من الميراث ، اذا مات رجل وترك زوجة وأماً وجدة لام وأخاً شقيقاً،فللزوجة الربع وللام الثلث وللاخ الباقي ولاشيء للجدة لسقوطها بالام وتحل المسالة على الوجه الاتي :ـ

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (١٢)
زوجة	¼	٣	
أم	⅓	٤	
جدة لأم	—	—	
أخ شقيق	الباقي	٥	

وللشقيقتين الثلثان ولاشي للاخت لأب .

٧ ـ بنت الصلب :ـ وهي كل أنثى للمتوفى له عليها ولادة مباشرة بغير واسطة ثلاث حالات : ـ

الاولى ـ تأخذ النصف اذا لم يوجد معها ابن .

الثانية ـ اذا وجد معها أبن (أخوها) فعندئذ يكون الجميع عصبة،للذكر مثل حظ الانثيين •

الثالثة :ـ اذا زاد عدد البنات على واحدة ولم يكن معهن أخ لهن يعصبهن فلهن ثلثا التركة ، أما لو كان معهن أبن ، فللذكر مثل حظ الانثيين •

مثال الحالة الاولى : لو توفي رجل وترك زوجة وبنتاً وأباً ، فللزوجة الثمن وللبنت النصف وللاب السدس فرضاً والباقي تعصيباً ، وتحل المسألة على الوجه الأتـي : ـ

فلو كانت التركة ألفاً ومائتي دينار فنصيب الزوجة منها يكون مائة وخمسين ديناراً وللبنت ستمائة دينار ، وأربعمائة وخمسون نصيب الاب

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة(٢٤) التركة ١٢٠٠ دينار
زوجة	$\frac{1}{8}$	٣	١٥٠ دينار
بنت	$\frac{1}{2}$	١٢	٦٠٠ دينار
أب	$\frac{1}{6}$ + الباقي	٤ + ٥ = ٩	٤٥٠ دينار

ومثال الحالة الثالثة :ـ لو ماتت امرأة وتركت زوجاً وأماً وبنتين ، فللزوج الربع وللأم السدس وللبنتين الثلثان ، وتحل المسألة كما يلي :

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (١٢) وتعول الى ١٣ (١) التركة ٢٤٠٠ دينار
زوج	$\frac{1}{4}$	٣	٥٥٣٫٨٤٥ دينار
ام	$\frac{1}{6}$	٢	٣٦٩٫٢٣ دينار
بنتان	$\frac{2}{3}$	٨	١٤٧٦٫٩٢ دينار

(١) العول : زيادة في عدد السهام على أصل المسألة ونقصان في مقادير الأنصباء اذا ضاق أصلها على الفروض •

فاذا علمنا ان مقدار المال الموروث كان الفين واربعمائة دينار فان نصيب الزوج ينبغي ان يكون ستمائة دينار وللام اربعمائة دينار وللبنتين الفاً وستمائة دينار • ولما كانت التركة لا تفي بالحصص المذكورة فعندئذ نضطر الى تنقيص نصيب كل وارث ليتم توزيع المال بصورة صحيحة وهذا معنى العول • فعليه ان نصيب الزوج سيصبح ٥٤٥ و ٥٥٣ ديناراً وحصة الام ٢٣ و ٣٦٩ دينارا ونصيب البنتين ٩٢ ر ١٤٧٦ ديناراً •

ولو ترك المتوفى زوجة وبنات وبنين ، فللزوجة الثمن ، وتقسم بقية التركة بين البنات والبنين ، للذكر مثل حظ الأنثيين •

٨ ـ بنت الأبن :

وهي كل أنثى ادلت الى الميت بواسطة ابنائه ، سواء أدلت بأبن الميت لصلبه أو آبن أبنه وان نزل •

وبنت الابن لاترث مع وجود ابن الصلب،واذا فقدت بنت الصلب،فأنها تأخذ حكمها • واذا وجدت بنت الصلب ، فان احوال بنت الأبن تختلف تبعاً لتعدد بنت الصلب او انفرادها ، وتبعاً لوجود ابن الأبن او عدم وجوده • وعلى هذا يمكن القول ، بأن لبنت الأبن حالات خمساً •

الأولى : تستحق النصف اذا انفردت ولم يكن معها بنت الصلب ولاأبن أبن يعصبها •

الثانية : اذا زاد عدد بنات الأبن على واحدة فيكون لهما الثلثان ، بشرط الا يكون من جملة الورثة أولاد صلبيون وليس معهن ابن أبن يعصبهن •

الثالثة : اذا وجدت بنت الصلب وبنت أبن ، فلبنت الصلب النصف ، ولبنت الأبن السدس تكملة للثلثين ، بشرط ألا يكون معهن ابن أبن يعصبهن

فلو توفي رجل وترك بنتاً وبنت ابن وابا ، فان للبنت النصف ولبنت الابن السدس ، وللاب السدس فرضاً والباقي تعصيباً •

فلو كان المال الموروث تسعمائة دينار فان نصيب البنت منه اربعمائة وخمسون ديناراً ، ومائة وخمسون لبنت الابن ، وماتبقى من المال فهو نصيب الاب . وتحل المسألة على النحو الاتي :

الورثة	الفروض	السهام	اصل المسألة	التركة ٩٠٠ دينار
بنت	$\frac{1}{2}$	٣	٦	٤٥٠ دينار
بنت ابن	$\frac{1}{6}$	١		١٥٠ دينار
اب	$\frac{1}{6}$ + الباقي	١ + ١		٣٠٠ دينار

الرابعة : تكون بنت الأبن عصبة اذا وجد معها أبن الأبن ممن هو في طبقتها يعصبها لافرق بين أن يكون ابن الأبن أخاً لها أم ابن عمها .

الخامسة : حجب بنت الأبن ، أي حرمانها من الميراث وذلك في حالتين :

الاولى : مع وجود البنتين الصلبيتين فاكثر ، لاستغراقهما الثلثين ، فاذا توفى وترك بنتين وزوجة وبنت ابن وأخاً شقيقاً ففرض الزوجة الثمن وللبنتين الثلثان والباقي للاخ ولاشيء لبنت الأبن ، لسقوطها بالبنتين .

الا اذا كان مع بنت الأبن ، ابن الأبن فانه يعصبها سواء كان في درجتها كاخيها وأبن عمها ، أو انزل منها درجة كابن اخيها وابن ابن عمها ، فيأخذان مابقى من التركة للذكر مثل حظ الأنثيين .

الثانية : اذا وجد ابن صلبي للمتوفى أو أبن أبن أعلى درجة منها،فلا شيء لبنت الأبن . وابن الأبن الاقرب يحجب بنت الابن الأبعد منه درجة .

فعلى هذا لو توفى رجل وترك أبناً وبنات الابن ، فالمال كله للابن ، واذا مات وترك ابن الأبن وبنت ابن الابن ، فالمال كله لابن الابن ، ولاشيء لبنت ابن الأبن ، لانها انزل منه درجة فتسقط به .

٩ ـ الأخت الشقيقة :

وهي أخت المتوفى من أمه وأبيه وحالاتها خمس :

١ ـ سقوطها بالفرع الوارث اذا كان ذكراً وبالاب ولاتسقط بالجد عند جمهور الفقهاء .

٢ ـ تأخذ النصف اذا كانت واحدة وليس معها أخ شقيق يعصبها .

٣ ـ تأخذ الثلثين اذا كان عددها اثنين فأكثر وليس معهن أخ شقيق يعصبهن .

٤ ـ ترث بالتعصيب اذا كان معها أخ شقيق فيأخذ الكل جميع التركة أو الباقي منها ، للذكر مثل حظ الانثيين .

٥ ـ ترث بالعصوبة اذا كان من جملة الورثة بنت الصلب واحدة او أكثر أو مع بنت الابن واحدة أو أكثر ، ففي هذه الحالة تأخذ بنت الصلب النصف وبنت الابن تأخذ السدس تكمله للثلثين والاخت الشقيقة تأخذ الباقي .

الأمثلة :

اذا مات رجل وترك ابناً واختاً شقيقة ، فلا شيء للأخت في هذه الحالة ، وكذلك الحال لو كان بدل الابن اباً وهذه هي الحالة الاولى .

ولو ماتت امرأة وتركت زوجاً واختاً شقيقة ، فأن للزوج النصف وللاخت الشقيقة النصف ايضاً .

واذا مات رجل وترك أماً وأخاً شقيقاً واختاً شقيقة فأن للأم السدس والباقي يقسم على الأخ والأخت ، للذكر مثل حظ الانثيين .

واذا مات وترك بنتاً وبنت ابن واختين شقيقتين فان للبنت النصف ولبنت الابن السدس تكملة للثلثين والباقي للأختين .

سيكون الفاً وخمسمائة دينار ، ونصيب بنت الابن السدس وهو خمسمائة والباقي منه حظ الاختين ، يقسم بينهما بالتساوي •

وتحل المسألة على الوجه الآتي :

الورثة	الفروض	السهام	اصل المسألة (٦) ٣٠٠٠ دينار
بنت	$\frac{1}{2}$	٣	١٠٠٠ دينار
بنت الأبن	$\frac{1}{6}$	١	٥٠٠ دينار
أخت شقيقة	الباقي	١	٥٠٠ دينار
أخت شقيقة		١	٥٠٠ دينار

١٠ ـ الأخت لأب :

وهي أخت المتوفى من ابيه فقط ، ولها حالات الأخت الشقيقة عند فقدها بالأضافة الى حالة آخرى ، فعلى هذا تكون حالاتها ستاً كما يلي •

١ ـ تأخذ النصف اذا انفردت ولم تكن ثمت اخت شقيقة ولا من يحجبها

٢ ـ أن تأخذ الأكثر من واحدة الثلثين اذا لم يوجد اخوات شقيقات ولا من يحجبهن •

٣ ـ أن يعصبها الأخ لأب ، فيكون نصيبها معه للذكر مثل حظ الاثنين •

٤ ـ تكون عصبة مع الغير في حالة وجود فرع وارث مؤنث بنت أو بنت أبن أوهما معاً •

فالفرع المؤنث الوارث يأخذ فرضه مع أصحاب الفروض • والباقي تأخذه الأخت لأب بشرط ان لايكون هناك أخ لاب ولاأخت شقيقة •

٥ ـ تأخذ مع الأخت الشقيقة السدس تكملة للثلثين في حالة استحقاق الشقيقة للنصف •

٦ ـ حجبها من الميراث بالأب والفرع المذكر والاخ الشقيق وبالاخت الشقيقة اذا صارت عصبة مع الغير فأنها حينئذٍ تنزل منزلة الأخ الشقيق[1] . كما أنها تحجب بالاختين الشقيقتين اذا استغرقن الثلثين ولم يكن مع الأخت لأب من يعصبها .

الأمثلة :

١ ـ اذا ماتت امرأة وتركت زوجاً واختاً لأب ، فلكل منهما النصف .

٢ ـ توفي رجل وترك زوجة واماً واختين لأب ، يكون للزوجة الربع وللأم السدس وللاختين لأب الثلثان .

٣ ـ ولو توفي رجل عن زوجة وأخت لأب وأخ لأب ، يكون للزوجة الربع والباقي للاخ وللاخت ، للذكر مثل حظ الأنثيين .

٤ ـ ولو توفيت امرأة عن زوج وابن وأخت لاب ، لاشيء للاخت لأب لأنها محجوبة بالأبن .

٥ ـ وفي زوجة وأختين شقيقتين وأخت لأب ، يكون للزوجة الربع وللشقيقتين الثلثان ولاشيء للاخت لأب .

٦ ـ ولو توفي عن زوجة وأختين شقيقتين وأخت لأب وأخ لأب ، فللزوجة الربع وللشقيقتين الثلثان ، والباقي للاخ والأخت لأب للذكر مثل حظ الأنثيين ، فلو كان المبلغ الموروث الفاً وثمانمائة دينار ، تاخذ الزوجة منه اربعمائة وخمسين ديناراً ، وتاخذ الاختان الشقيقتان منه الفاً ومائتين دينار ، ومائة دينار نصيب الاخ لأب ، وخمسون ديناراً نصيب الاخت لأب . وتحل المسألة على الوجه التالي :

(١) راجع الحالة الرابعة من حالات الأخت الشقيقة .

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة(١٢) ١٨٠٠ دينار
زوجة	$\frac{1}{4}$	٣	٤٥٠ دينار
أختان شقيقتان	$\frac{2}{3}$	٨	١٢٠٠ دينار
أخ لأب		١	١٠٠ دينار
	[الباقي] يقسم بينهما للذكر مثل حظ الأنثيين		
أخت لأب			٥٠ دينار

١١ – الاخ لأم •

١٢ – الأخت لأم (الأخوة لأم) :

والاخوة لام هم الذين يدلون الى الميت عن طريق الأم فقط،وذكورهم واناثهم في الحكم سواء ، ولهم ثلاث حالات •

الاولى : حرمانهم من الميراث اذا وجد بين الورثة فرع وارث ، سواء كان مذكراً أم مؤنثاً ، أو وجد الاصل الوارث المذكر،فعلى هذا لاميراث للأخوة لأم مع الأبن وابن الأبن مهما نزل ولا مع البنت الابن مهما نزل أبوها ، ولا مع الأب والجد الصحيح وان علا •

الثانية : – يأخذ السدس اذا انفرد ذكراً كان أو أنثى •

الثالثة : – يأخذ الأثنان منهم فأكثر الثلث ذكوراً كانوا أم اناثاً ، ويقسم بينهم بالسوية •

الأمثلة :

١ – مات رجل وترك زوجة وأماً وأخاً لأم ، فللزوجة الربع وللام الثلث وللاخ لأم السدس •

٢ – توفت أمرأة عن أبن وأخوين لأم ، لاشيء للأخوين لحجبهم من الميراث بوجود الأبن والمال كله للابن •

٣ – مات رجل عن زوجة وأم وأخوة لأم ، للزوجة الربع ، وللام السدس ولأخوة الأم الثلث هم فيه سواء مذكرهم ومؤنثهم ، وتحل المسألة على الوجه الأتي •

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (١٢)
زوجة	$\frac{1}{4}$	٣	
أم	$\frac{1}{6}$	٢	
أخوة لأم	$\frac{1}{3}$	٤	(والباقي يرد على الأم والأخوة لأم)

فلو فرض ان المال الموروث كان تسعمائة دينار فنصيب الزوجة في هذه الحالة مائتان وخمسة وعشرون ديناراً ونصيب الام مائة وخمسون ديناراً ونصيب الاخوة ثلثمائة ، والباقي يرد عليهم وعلى الام •

المسالة المشتركة :

اذا ماتت أمرأة وتركت زوجاً وأماً وأخوين لأم وأخاً شقيقاً ، فللزوج النصف وللام السدس وللأخوين الثلثوالباقيللأخالشقيق على وجه التعصيب وتحل المسألة على النحو الأتي : ـ

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (٦)
زوج	$\frac{1}{2}$	٣	
أم	$\frac{1}{6}$	١	
اخوان لأم	$\frac{1}{3}$	٢	
أخ شقيق		لم يبقى له شي	

ففي هذه المسألة نجد الأخالشقيق لم يرثشيئاً منأخته بخلافالأخ لأم•

وقد قضى عمر بن الخطاب (رض) فيمثل هذه المسأله بمشاركةالأخ الشقيق لأخوته اولاد الام بالثلث ، فيقسمونه بالسوية بينهم لافرق بين الذكر منهم والانثى ، ولهذا سميت بالمشتركة •

(١٢) الرد عزيزي الطالب من المواضيع التي ستدرسها في مرحلة قادمة باذن الله

فلو كان المال الموروث سبعمائة وعشرين ديناراً فـان نصـيب الزوج منه ثلثمائة وستون ديناراً ونصيب الام مائة وعشرون ديناراً وماتبقى من المال (٢٤٠) دينارا يقسم بين الاخوان لام والاخ الشقيق بالتساوي ، فيكون نصيب كل واحد منهم هنا ثمانين دينارا •

الارث بالتعصيب والقرابة :-

بعد هذا العرض للورثة من أصحاب الفروض ، نود أن نلقي نظرة سريعة الى الصنف الثاني من الورثة وهم العصبة • والعصبة على نوعين : - نسبيه ، وسببيه ، والذي يهمنا منهما النسبيه ، وتقسم الى ثلاثة أقسام : -

أولاً : عصبة بالنفس : وهو كل ذكر يدلي الى الميت بقرابة دون أن تتوسط بينهما أنثى ، كالأبن وأبن الأبن والأب والجد والأخ الشقيق أو لأب•••• الخ ونلاحظ من خلال عرضنا لبعض العصبات ، ان الواحد منهم قد يكون عصبة وصاحب فرض في آن واحد ،كالأب والجد مثلاً ، وقد يكون عصبة فقط كالابن وأبن الأبن ولو فرض أن وجد في الورثة عصبة بنفسه أكثر من واحد ، فعندئذ لابد من ترجيح أحدهم على الأخر ، ويكون الترجيح بينهم على النحو الاتي :-

أ - باعتبار الجهة،فتقدم جهة البنوة على الأبوة ،والأبوة على الأخوة والاخوة على العمومة •

ب - باعتبار الدرجة ، فاذا تساوت جهة العصبة بأن كانوا كلهم من الاصول مثلاً ، فيقدم الأقرب درجة الى الميت على غيره ، فالأب مقدم على الجد ، والاخ على أبن الاخ وهكذا •

ج - باعتبار القوة ، اذا تساوت العصبة في الجهة والدرجة قدم الأقوى قرابة الى الميت على غيره ، وهذا لايتحقق الا في جهة الاخوة والعمومة ، فيقدم الاخ الشقيق على الاخ لأب ، والعم الشقيق على العم لأب •

ثانياً - العصبة بالغير : وهي المرأة صاحبة فرض تكون عصـبة بأنضـمامها الى ذكر عاصب بنفسـه ، كالبنت يعصـبها الأبن وبنت الأبن مع أبن الأبن وهكذا •

ثالثاً ـ العصبة مع الغير : ـ وهي كل انثى تصير عصبة مع أخرى ذات فرض وهذه الحالة خاصه بالأخت الشقيقة مع البنت أو بنت الأبن ، والأخت لأب مع البنت أو بنت الأبن أيضاً ، شريط أن لا يكون مع الأخت أخ معصب (١) .

أصول المسائل وتصحيحها :

ونعني بذلك طريقة أستخراج حصة كل وارث بالسهام ولمعرفة ذلك نقول.

ان كان جميع الورثة من العصبة يمكن معرفة سهام كل وارث بمعرفة عددهم وحالهم من حيث الذكورة والانوثة ، فيكون للذكر مثل حظ الانثيين فلو فرض أن رجلاً قد توفي عن ثلاثة أخوة اشقاء ، واربع أخوات شقيقات كان القسمة من عشرة لأن كل أخ يأخذ نصيب أختين ، فتكون سهام الأخوة ستة وسهام الأخوات أربعة ، ويكون المجموع عشرة للاخت منها واحد من عشرة وللاخ اثنان من عشرة ، .

وان كان في المسألة صاحب فرض واحد أعتبر مخرج نصيبه أصل المسألة ومخرج النصيب هو مقام الكسر الدال على نصيبه . فلو فرض أن كان في المسألة أب وأم فان الام تستحق الثلث ويكون أصل المسألة هو ثلاثة ، فتأخذ الام سهماً واحداًوالباقي للأب وقدره سهمان ، وان كان الورثة زوجاً وأباً ، فأصل المسألة يكون أربعة لان الزوجة لها الربع فيكون لها سهم وللاب الباقي ثلاثة أسهم .

وأن أشتملت المسألة على صاحب فرض وعدد من العصبة فكذلك يعتمد على مخرج نصيب صاحب الفرض ،فلو ماتت أمرأة عن زوج وابن بنت ، فالزوج يأخذ الربع فأصل المسألة من أربعة،للزوج سهم واحد والباقي بين الأبن والبنت للذكر مثل حظ الاثنين .

واذا تعدد أصحاب الفروض في المسألة ، كان أصل المسألة هو أصغر عدد يقبل القسمة على المخارج كلها .

---

(١) راجع الاحوال الشخصية لاستاذنا الكبيسي ٢ / ١٤٠ ومابعدها

مثال ذلـك : اذا توفى رجل عن زوجـة وبنت وبنت أبن وابن أبن ، فالزوجة نصيبها الثمن ،
والبنت لها النصف ، والباقي لأبن الأبن وبنت الأبن للذكر مثل حظ الاثنين ، فاصل المسألة هنا من ثمانية الذي هو مخرج الثمن نصيب الزوجة ، وهو اصغر عدد يقبل القسمة على المخارج • (١) وتحل المسالة على الوجه الاتي •

الورثة	الفروض	السهام	أصل المسألة (٨)
زوج	$\frac{1}{8}$	١	
بنت	$\frac{1}{2}$	٤	
بنت أبن		١	
	[الباقي]		
أبن أبن		٢	

ومما يتقدم يتبين لنا أن أصل المسألة قد يكون (٢) وقد يكون (٣) وقد يكون (٤) وربما (٦) أو (٨) واحيانا (١٢) أو (٢٤)•أماكيفيةتقسيمالتركةعلى أصحابهـا فتقول لو فرض ان كان المبلغ المراد توزيعـه على الورثة في المسـألة السـابقة كان (٨٠٠٠) دينار ، فالسـهم الواحد منه يكون (١٠٠٠) دينار لاننا عندما نقسم (٨٠٠٠) على (٨) أصل المسألة يكون السهم(١٠٠٠)وعندئذ يعطى كل واحد من الورثة ماخص سهامه من أموالها •

فللزوجة في هذه المسألة (١٠٠٠) دينار وللبنت (٤٠٠٠) دينار ولبنت الأبن (١٠٠٠) دينار ولأبن الأبن (٢٠٠٠) دينار وهكذا تجري القسمة في كل مسألة •

تمارين في الميراث :

١ ـ توفت فاطمة عن زوجها أحمد وأختها الشقيقة ليلى ، وتركت مبلغاً من المال قدره خمسة الآف دينار ، فاذا كانت قد أوصت بنصف المبلغلدار الأيتام، فما هو نصيب كل من أحمد وليلى ؟

(١) راجع أحكام التركات والمواريث للمرحوم أبو زهرة ص ١٧٠ ومـا بعدهـا •

٢ - مات رجل عن أم وبنت وأب،وترك أرضاً مربعة الشكل طول ضلعها ١٠٠م، فاذا كان سعر المتر المربع الواحد يساوي (١٠) عشرة دنانير ، فما هو ثمن الأرض وما هو نصيب كل وارث من المال الموروث ؟

٣ - مات خالد وترك زوجته سلمى وولده محموداً،وترك مبلغا من النقود قدره (٤٠٠٠) أربعة الاف دينار ، وكان عليه دين زكاة لحول واحد،فأذا علمنا أن نصاب الزكاة يساوي ٢٫٥٪ فما هو المقدار الواجب للزكاة،وماهو نصيب سلمى ومحمود من التركة ؟

٤ - توفى عمرو وترك زوجة وأماً وأباً ، فأذا علمنا ان نصيب الزوجة من التركة كان ستمائة دينار ، فما هو حصة كل من الأم والأب ، وما هو مقدار المال الموروث ؟

٥ - توفت هند عن زوج وجدة لأم وأخ شقيق ، وتركت ارضا مستطيلة الشكل طولها سبعون متراً وعرضها ثلاثون متراً ، وكان ثمن المتر المربع الواحد عشرين ديناراً ، فما هو ثمن الأرض ، ومانصيب كل وارث من المال ؟

٦ - ماتت أمرأة وتركت زوجاً وأماً وبنتين ، وتركت مبلغا من المال ، فأذا كانت حصة الزوج من المال (٨٠٠) ثمنمائة دينار ، فما هو نصيب الأم والبنتين وماهو مقدار المال الموروث ؟

٧ - اذا فرضنا أن نصيب زوجة رجل متوفى من التركة (١٢٠٠) الف ومائتا دينار ، فاذا كان من جملة الورثة أب وأم وبنت أبن وأبن أبن ، فما هو نصيب كل واحد من هؤلاء ، وما هو مقدار التركة ؟

٨ - اذا توفى رجل وترك بنتاً وبنت ابن وأباً ، وترك ستة الاف ديناراً ، فما مقدار ما يصيب كل وارث من المال ؟

٩ - مات زيد عن زوجة وأختين شقيقتين وأخت لأب وأخ لأب ، وكان مجموع ماترك من المال أربعة الأف دينار ، فما هو نصيب كل وارث من التركة ؟

١٠ ـ توفي رجل وترك زوجتين واماً وبنتاً واباً ، فاذا كان نصيب احدى الزوجتين تسعمائة دينار فما مقدار مايأخذه كل وارث من ورثته الآخرين وماهو مجموع المال ؟

١١ ـ اذا كان نصيب سعاد من تركة ابيها المتوفى (٤٠٠٠) اربعة الاف دينار وكان للمتوفى بنت آخرى تدعى خنساء وزوجته حليمة ووالده امجد فما هو نصيب كل من خنساء وحليمة وأمجد، وماهو مقدار المال الموروث؟

١٢ ـ مات رجل وترك بنتين وابناً وجدا صحيحاً فاذا كان نصيب احدى ابنتيه من التركة الفي دينار (٢٠٠٠) فما هو نصيب الأبن والجد وماهومقدار التركة ؟

١٣ ـ اذا كان نصيب وليد من تركة زوجته المتوفاة (٣٠٠٠) ثلاثة الاف دينار وكانت الزوجة قد تركت أخاً شقيقاً وجدة لأم ، فما هو نصيب الأخ والجدة ، وما هو مقدار ماتركته الزوجة من المال ؟

١٤ ـ توفى علي وترك زوجة وأبوين وبنت أبن ـ هو أبن عمها ـ وترك مبلغاً من المال قدره (٤٨٠٠) أربعة آلاف وثمنمائة دينار ، فما هو مقدار مايصيب كل وارث من هذه التركة ؟

١٥ ـ توفى رجل وترك زوجة وأماً وأخوين لأم مبلغاً من المال ، فاذا علمنا ان نصيب الأم كان (١٠٠٠) ألف دينار ، فما هو نصيب كل من الزوجة والأخوين وما هو المبلغ الموروث ؟

١٦ ـ مات كامل عن أب وابن وأخ شقيق،وترك مبلغاً من المال قدره (٣٦٠٠) ثلاثة الاف وستمائة دينار ، فما هي حصة كل وارث من المال

الزكاة

وهي اسم لما يخرجه المسلم من حق الله تعالى من ماله للمستحقين .
وسميت زكاة لما يكون فيها من تزكية النفس وتطهيرها من الذنوب ، وزيادة للمال ونمائه بطرح البركة فيه .

دليل فرضيتها :

بين الله تعالى في القرآن الكريم أن الزكاة فرض بقوله «وأقيموا الصلاة وآتوا الزكاة »[1] . وقوله سبحانه «خذ من أموالهم صدقة تطهرهم وتزكيهم بها»[2]

وفي الحديث الشريف «بني الاسلام على خمس شهادة أن لا اله الا الله وأن محمداً عبده ورسوله واقام الصلاة وايتاء الزكاة والحج وصوم رمضان » [3]

كما ان الاجماع قد قام فرضيتها .

أصناف الاموال الواجبة فيها الزكاة :ـ

فرض الاسلام الزكاة في الاصناف الستة من الاموال وهي : ـ

١ ـ النقود ٢ ـ الدين ٣ ـ النبات (الزروع والثمار)
٤ ـ البهائم ٥ ـ التجارة ٦ ـ الركاز

اولا ـ النقود : ـ

والمقصود بها الذهب والفضة خاصة ، ونصاب الذهب عشرون مثقالا ويجب فيه نصف مثقال.أما الفضة فنصابها مائتا درهم وزكاتها خمسة دارهم.

المثقال : ـ ووزنه (٢٠) عشرون قيراطاً

القيراط : ـ ووزنه خمس شعيرات

فالمثقال وهو الدينار سابقاً ـ وزنه (١٠٠) مائة شعيرة

---

(١) آية ٤٣ سورة البقرة (٢) آية ١٠٣ سورة التوبة .
(٣) الحديث متفق عليه راجع رياض الصالحين ص ٤٤٧ .

الدرهم :ـ ووزنه (٧٠) سبعون شعيرة

وبما أن التعامل يجري حاليا بالاوراق النقدية والمسكوكات المعدنية فمن الممكن تقدير هذه العملة بالذهب أو الفضة ، وربع العشر هو المقدار الواجبة اخراجه أي ٥ر٢٪

ثانياً : ـ الدين : ـ قسم أبو حنيفة الدين الى ثلاثة أقسام :

أ ـ دين قوي : ـ وهو ماكان بدلاً من قرض أو مال تجارة فتجب فيه الزكاة اذا حال عليه الحول ، الأان المالك لايؤدي زكاته الا أذا تسلم مالايقل عن أربعين درهماً ، فيجب فيه درهم ، ومازاد فبحسابه •

ب ـ دين متوسط : ـ وهو ماكان عوضاً عن مال ليس للتجارة كثمن الملابس ودور السكن ويجب زكاة هذا القسم اذا حال عليه الحول وقبض مقدار نصاب منه ، ويزكيه عما مضى •

ج ـ دين ضعيف : وهو بدل ماليس بمال كالمهر والوصية ، ولايزكيه صاحبه الا اذا تسلم مقدار نصاب منه وحال عليه الحول • (معنى هذا لايزكيه عن السنين الماضية) •

ثالثاً : ـ زكاة النبات (الزروع والثمار)

تجب الزكاة في حاصل كل ما يزرعه المسلم في الأرض ، لافرق بين كون المزروع حبوباً أو ثماراً ، والثمار والخضر تزكى عند نضجها وقطفها •

أما الزروع فتزكى بعد حصادها ، ويجب فيها العشران سقيت بماء المطر أو سيحاً أو بأي مصدر مائي أخرعلى ان لايصرف المالك على سقيها شيئاً من ماله ولو صرف على اروائها أجرة ، كأن يكون بواسطة مضخة أو غيرها فزكاتها في هذه الحالة نصف العشر •

رابعا : زكاة البهائم (الحيوانات) :

ولاتجب الزكاة فيها الا بعد توفر شروط أربعة ، هي :

١ ـ أن تكون البهيمة سائمة ـ أي تعتمد في علفها على ماتنتجه الأرض من غير ثمن ـ في أكثر أيام السنة .

٢ ـ أن يحول على ملكيتها حول كامل .

٣ ـ أن تبلغ نصاباً معيناً .

٤ ـ أن تتخذ الحيوانات للحليب والنسل والتسمين ، أما لو أتخذها المالك لاعمال الزراعة والحراثة فلا زكاة فيها[1] .

نصاب الزكاة	المقدار الواجب اخراجه
زكاة الأبل (٥) خمس	شاة واحدة ١
زكاة الأبل (١٠) عشر	شاتان ٢
زكاة الأبل (١٥) خمس عشرة	ثلاث شياه ٣
زكاة الأبل (٢٠) عشرون	أربع شياه ٤
زكاة الأبل (٢٥) خمس وعشرون	ناقة يقال لها بنت مخاض وهي مامضى على ولادتها سنة وطعنت في السنة الثانية
زكاة الأبل (٣٦) ست وثلاثون	ناقة يقال لها بنت لبون مضى على ولادتها سنتان وطعنت في الثالثة
زكاة الأبل (٤٦) ست وأربعون	ناقة يقال لها حقه وهي التي طعنت في السنة الرابعة .
زكة الأبل (٦١) احدى وستون	ناقة يقال لها جذعة وهي التي طعنت في الخامسة .
زكاة الأبل (٧٦) ست وسبعون	ناقتان بنتا لبون
زكاة الأبل (٩١) أحدى وتسعون	ناقتان حقتان

(١) أنظر فتح القدير للكمال أبن الهمام ١/٤٩٤ .

فيكون في (١٢٥) مائة وخمس وعشرين شـاة مع ناقتين (حقتين) وهكذا .

زكاة البقر :

زكاة البقر (٣٠) ثلاثون بقرة	بقرة واحدة وتسمى بتيع وعمرها سنة وطعنت في الثانية
زكاة البقر (٤٠) أربعون	بقرة واحدة يقال لها مسنة ، عمرها سنتان وطعنت في الثالثة .
زكاة البقر (٦٠) ستون	بقرتان (بتيعان)
زكاة البقر (٧٠) سبعون	بقرتان (مسنة وبتيع)

وهكذا يتغير الفرض في كل عشرة من بتيع الى مسنة ومن مسنة الى بتيع ، وحكم الجاموس حكم البقر أيضاً .

زكاة الغنم :

(٤٠) أربعون شاة	شاة واحدة ١
(١٢١) مائة واحدى وعشرون	شاتان ٢
(٢٠١) مائتان وواحدة	ثلاث شياه ٣
(٤٠٠) أربعمائة	أربع شياه ٤

ثم في كل مائة شاة وهكذا

التجارة :

تجب الزكاة في أموال التجارة كالسلع والأراضي والحيوانات وكل ما أعد للبيع ، فأذا بلغت قيمتها مقدار نصاب الذهب أو الفضة: فعندئذ تحسب قيمتها ويخرج منها مقدار ٢٫٥٪ كما هو الحال في زكاة النقود .

الركاز :

وهو المعدن أو الكنز الذي يجده الشخص في باطن الأرض ، فعلى من يجده التصدق بخمسه في الحال ، أي لا يشترط عليه مرور سنة كاملة .

الخراج :

وهو مقدار من المال فرضه الأمام على أرض جاهد المسلمون أهلها فانتصروا عليهم وابقوها بيد أصحابها ، أو على أرض من أراضي الأعاجم صالح الامام عليها أهلها ودخلوا في عهد ذمة من المسلمين من دون قتال ، فهي أرض خراجيه أيضاً ، والخراج على قسمين :

اولا ــ

خراج مقاسمة : وذلك بأن يقاسم الأمام صاحب الأرض فيما تنتجه أرضه من محاصيل زراعية ، فيأخذ مقداراً معيناً منه ، كأن يكون عشر الحاصل أو نصف العشر أو أكثر أو أقل من ذلك ، حسبما تقتضيه المصلحة ، ليكون مورداً الى بيت مال المسلمين .

ثانيا ــ خراج وظيفة :

وهو ان يفرض الامام مقداراً معيناً من الطعام أو مبلغاً من النقود على مساحة معينة من الأرض . وقد روي لنا التأريخ بأن عمر بن الخطاب رضي الله عنه قد فرض على كل جريب من الأرض عامر أو غامر يناله الماء بدلو ــ أي بواسطة ــ أو بغيره ، سواء زرعه صاحبه أو عطله ، درهماً وقفيزاً واحداً . وأخذ من جريب الكرم عشرة دراهم ، ومن جريب السمسم خمسة دراهم ومن الخضر من غلة الصيف من كل جريب ثلاثة دراهم ومن جريب القطن خمسة دراهم .

وأتماماً للفائدة ندون في أدناه اسماء بعض المقادير المستعملة في العهد السابق .

١ ـ الجريب : مكيال وهو أربعة أقفزة ، والجريب من الأرض مساحة من الأرض تسع لبذر الجريب من المكيال .
٢ ـ القفيز : ويساوي ثمانية مكاكيك .
٣ ـ المكوك : مكيال يساوي ثلاث كيلجات .
٤ ـ الكيلجة : مكيال يساوي مناً وسبعة اثمان المن
٥ ـ المَن : مكيال يساوي رطلين .
٦ ـ الرطل : مكيال يساوي اثنتي عشرة أوقية .
٧ ـ الاوقية : مكيال تساوي استاراً وثلثي استار .
٨ ـ الاستار : مكيال يساوي أربعة مثاقيل ونصف .
٩ ـ المثقال : يساوي درهماً وثلاثة اسباع الدرهم .
١٠ ـ الدرهم : يساوي ستة دوانيق .
١١ ـ الدانق : يساوي قيراطين .
١٢ ـ القيراط : يساوي خمس حبات شعير متوسطة الحجم(٢) .

اهم مراجع البحث بعد القرآن الكريم

١ ـ الخراج لابي يوسف ص٣٨
٢ ـ مختار الصحاح لمحمد بن أبي بكر الرازي ص٦٣١
٣ ـ شرح خلاصة الفرائض : نظم متن الراحبية لعبد الملك بن عبد الوهاب المكي البتي
٤ ـ شرح متن الرجبية : للشيخ محمد بن محمد سبط المارديني
٥ ـ احكام التركات والمواريث : للاستاذ محمد ابو زهرة
٦ ـ الاحوال الشخصية في الفقه والقضاء والقانون للاستاذ الدكتور احمد الكبيسي .
٧ ـ الخراج ـ للامام ابو يوسف .

الأساس ، الأسس ، القوى

بند (١) : رفع عدد حقيقي لأس صحيح موجب :

اذا كان س عدداً **حقيقياً** ، م عدداً صحيحاً موجباً فأن المقصود بالرمز $\text{س}^{\text{م}}$ هو :

$$\text{س}^{\text{م}} = \text{س} \times \text{س} \times \text{س} \times \cdots \times \text{س}$$

حيث س مكررة كعامل ، م من المرات

يقرأ الرمز $\text{س}^{\text{م}}$: س أس م ، أو القوة الميمية للعدد س ، أو س مرفوعة للأس م ، ويسمى س أساس القوة ، م أس هذه القوة ...

وعليه فأن الأس (اذا كان عدداً صحيحاً موجباً) يدل على تكرار عملية الضرب للأساس في نفسه عدداً من المرات بقدر الأس .

من هذا التعريف نستنتج أن :

$\text{س}^{١} = \text{س}$ ،

$\text{س}^{\text{م}} =$ صفر اذا كان س = صفر ، م عدداً صحيحاً موجباً

أمثلة :

(١) $٢^{٤} = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$

(٢) $(-٢)^{٥} = (-٢) \times (-٢) \times (-٢) \times (-٢) \times (-٢) = -٣٢$

(٣) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣^{٤}}{٥^{٤}} = \frac{٨١}{٦٢٥}$

(٤) $(٤\,\text{س})^{٣} = ٤\,\text{س} \times ٤\,\text{س} \times ٤\,\text{س} = ٤^{٣}\,\text{س}^{٣} = ٦٤\,\text{س}^{٣}$

بند (٢) : قوانين الأسس :

[١] ـ اذا كان كل من أ ، ب عدداً صحيحاً موجباً فأن :

$$\text{س}^{\text{أ}} \times \text{س}^{\text{ب}} = \text{س}^{\text{أ}+\text{ب}} \quad \cdots [١]$$

ومعنى ذلك أنه « عند ضرب عدة قوى لها نفس الأساس ، فالناتج يكون قوة لها الأساس نفسه وأسها يساوي مجموع أسس القوى الداخلة في الضرب . »

أمثلة :

$$(١) \quad ٢^{٣} \times ٢^{٤} = ٢^{٧}$$

$$(٢) \quad \text{ص}^{٢} \times \text{ص}^{٣} = \text{ص}^{٥}$$

$$(٣) \quad ٥^{٢+\text{أ}} = ٥^{٢} \times ٥^{\text{أ}}$$

٢ ـ اذا كان كل من أ ، ب عدداً صحيحاً موجباً وكان أ > ب فان :

$$\text{س}^{\text{أ}} \div \text{س}^{\text{ب}} = \text{س}^{\text{أ}-\text{ب}} \quad \text{حيث س} \neq \text{صفر} \quad \ldots\ldots [٢]$$

ومعنى ذلك أنه « عند قسمة قوة لأساس ما على قوة لنفس الأساس ، فالناتج يكون قوة لها نفس الأساس وأسها يساوي الفرق بين أس المقسوم وبين أس المقسوم عليه . »

أمثلة :

$$(١) \quad ٢^{٥} \div ٢^{٣} = ٢^{٥-٣} = ٢^{٢} = ٢ \times ٢ = ٤$$

$$(٢) \quad \text{ص}^{٧} + \text{ص}^{٢} = \text{ص}^{٧-٢} = \text{ص}^{٥} \quad \text{حيث ص} \neq \text{صفر}$$

$$(٣) \quad ٥^{\text{أ}-٤} = ٥^{\text{أ}} + ٥^{٤}$$

٣ ـ اذا كان كل من أ ، ب عدداً صحيحاً موجباً فان :

$$(\text{س}^{\text{أ}})^{\text{ب}} = \text{س}^{\text{أب}} \quad \ldots\ldots [٣]$$

امثلة

$$(١) \quad (٥^{٣})^{٤} = ٥^{٣ \times ٤} = ٥^{١٢}$$

$$(٢) \quad (\text{س}^{٢})^{٣} = \text{س}^{٢ \times ٣} = \text{س}^{٦}$$

بند (٣) : معنى الاس النسبي

اذا كان كل من أ ، ب عدداً صحيحاً موجباً فاننا نعرّف $\text{س}^{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$ بالعلاقة التالية :

$$\text{س}^{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \sqrt[\text{ب}]{\text{س}^{\text{أ}}} \quad \ldots\ldots [٤]$$

$$(١)\quad ٥^{٣} = ٥^{\frac{٦}{٢}} = \sqrt{٥^{٦}}$$

$$(٢)\quad \text{ص}^{٤} = \text{ص}^{\frac{١٢}{٣}} = \sqrt[٣]{\text{ص}^{١٢}}$$

$$(٣)\quad \text{س}^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$$

$$(٤)\quad ٥^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٥}$$

$$(٥)\quad ٣^{\frac{٥}{٣}} = \sqrt[٣]{٣^{٥}}$$

ان القانون [٤] صحيح سواءً كان أ > ب أو كان ب > أ ، اذا كان أ > ب وكان أ قابلاً للقسمة على ب فأنّ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ عدد صحيح موجب (كما في الامثلة (١) ، (٢)) . أما اذا كان أ > ب وكان أ غير قابل للقسمة على ب فأن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ عدد نسبي اكبر من واحد [كما في المثال (٥)] . واذا كان ب > أ فأن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ كسر اعتيادي اصغر من واحد (كما في الامثلة (٣) ، (٤) ،) .

أمثلة تطبيقية :

مثال (١) اختصر المقدار التالي :

$$\frac{(\text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٣}\,\text{جـ})^{٣} \times \text{أ}\,\text{ب}^{٢}\,\text{جـ}^{٣}}{(\text{أ}^{٣}\,\text{ب}\,\text{جـ}^{٢})^{٢}}$$

حيث ان كلاً من أ ، ب ، جـ عدد حقيقي $\neq$ صفر

$$\frac{(\text{أ}^{٤}\,\text{ب}^{٣}\,\text{جـ})^{٣} \times \text{أ}\,\text{ب}^{٢}\,\text{جـ}^{٣}}{(\text{أ}^{٣}\,\text{ب}\,\text{جـ}^{٢})^{٢}} = \frac{\text{أ}^{٦}\,\text{ب}^{٩}\,\text{جـ}^{٣} \times \text{أ}\,\text{ب}^{٢}\,\text{جـ}^{٣}}{\text{أ}^{٦}\,\text{ب}^{٢}\,\text{جـ}^{٤}}$$

$$= \frac{أ^{٦+١} \times ب^{٩+٢} \times جـ^{٣+٣}}{أ^{٦} ب^{٢} جـ^{٤}}$$

$$= \frac{أ^{٧} \times ب^{١١} \times جـ^{٦}}{أ^{٦} ب^{٢} جـ^{٤}}$$

$$= أ \; ب^{٩} \; جـ^{٢}$$

مثال (٢) : اختصر المقدار التالي :

$$\frac{(٣^{٢} \times ٢^{٣})^{٤}}{\sqrt{٢^{٤}}} \times \frac{\sqrt[٣]{٣^{٦}}}{(٢^{٣} \times ٣^{٣})^{٢}}$$

الحل : المقدار

$$= \frac{٣^{٨} \times ٢^{١٢}}{٢^{٢}} \times \frac{٣^{٢}}{٢^{٦} \times ٣^{٦}}$$

$$= \frac{٣^{١٠} \times ٢^{١٢}}{٢^{٨} \times ٣^{٦}}$$

$$= ٢^{٤} \times ٣^{٤}$$

$$= ١٦ \times ٨١$$

$$= ١٢٩٦$$

بند (٤) : معنى الأس صفر والأس السالب :

يمكن توسيع القانون [٢] ليشمل الحالات التي يكون فيها أ = ب والحالات التي يكون فيها أ < ب .

اذا كان أ = ب يكون لدينا :ـ

$$س^{ب} \div س^{ب} = س^{ب-ب} = س^{صفر} \text{ حيث } س \neq صفر$$

لكننا نعلم أيضاً أن $س^{ب} \div س^{ب} = ١$ (لأن خارج قسمة أي عدد عدا الصفر على نفسه يساوي (١)) لذلك فان :

$$س^{صفر} = ١ \text{ حيث } س \neq صفر$$

ومن هذا نستنتج : أن القوة الصفرية لأي عدد حقيقي عدا الصفر = ١

أمثلة :

(١) $(٥)^{٠} = ١$

(٢) $(-٢)^{٠} = ١$

(٣) $(٥ س ص)^{٠} = ١$ اذا كان $س \neq$ صفر و $ص \neq$ صفر

اذا كان $أ < ب$ فيحصل من توسيع القانون [٢] ليشمل هذه الحالة أن :

$$س^{أ} \div س^{ب} = س^{أ-ب} \text{ ، حيث } س \neq صفر$$

لكن (أ − ب) عدد صحيح سالب ، ولمعرفة ماذا يعني $س^{أ-ب}$ عندما يكون (أ − ب) عدداً صحيحاً سالباً نعطي التعريف التالي : اذا كان س عدداً حقيقياً $\neq$ صفر وكان م عدداً صحيحاً موجباً فأن :

$$س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$$

$$\therefore س^{أ-ب} = \frac{١}{س^{ب-أ}}$$

امثلة :

$$(١)\quad \frac{أ^{٢}}{أ^{٥}} = \frac{أ \times أ}{أ \times أ \times أ \times أ \times أ} = \frac{١}{أ^{٣}} \quad \text{حيث } أ \neq \text{صفر}$$

$$(٢)\quad أ^{-٢} = \frac{١}{أ^{٢}} \quad \text{حيث } أ \neq \text{صفر}$$

$$(٣)\quad ٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$$

$$(٤)\quad \left(\frac{٣}{٤}\right)^{-٢} = \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٩}$$

$$(٥)\quad \frac{أ^{٢}}{أ^{٥}} = أ^{٢-٥} = أ^{-٣} = \frac{١}{أ^{٣}}$$

(قارن مع المثال ١) •

ملاحظـة :

مما سبق نكون قد تعلمنا ماذا يعني $س^{م}$ عندما يكون س عدداً حقيقاً ≠ صفر و م عدداً صحيحاً (موجباً أو سالباً أو صفراً) أو عدداً نسبيا ، وعليه فيمكن تعميم القوانين [١] و [٢] و [٣] لتشمل الحالات التي يكون فيها الأس عدداً صحيحاً سالباً أو صفراً او عدداً نسبياً •

تمارين (١)

س (١) : اختصر كلاً مما يلي الى أبسط شكل :

(أ) $\frac{٤٥^{٣} \times ١٦^{٢}}{٢٤^{٣} \times ٣٥^{٢}}$

(ب) $\frac{(س ص^{٢} ع)^{٣} \times (س^{٢} ص ع^{٣})^{٤}}{(س^{٣} ص ع)^{٢}}$ ، س $\neq$ صفر ، ص $\neq$ صفر ، ع $\neq$ صفر

(جـ) $\frac{٩^{س} \times ٦^{س}}{٨^{٢}\,٣^{س}}$ حيث س عدد صحيح (موجب أو سالب أو صفر) أو كسر (راجع الملاحظة في نهاية البند ٤)

س ٢ : ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

(أ) $ص^{-٢} \times ص^{-٥}$ ، حيث ص $\neq$ صفر

(ب) $(أ^{٣})^{٤}$ ، حيث أ $\neq$ صفر .

(جـ) $س^{٥} \times س^{-٥}$ ، حيث س $\neq$ صفر

(د) $٥^{-٢}$

(هـ) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-\frac{١}{٢}}$

(و) $(٤)^{-\frac{١}{٢}}$

الجذور الصماء

بند (٥) : معنى الجذر الأصم

هو جذر العدد اذا كان من غير الممكن التعبير عنه بشكل نسبة بين عددين صحيحين . مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt[٣]{٤}$.

ومما سبق ان تعلمناه نلاحظ ان الجذورالصماء ما هي الا اعداد مرفوعة لأسس كسرية .

فمثلا $\sqrt{٢} = ٢^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt{٣} = ٣^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{٤} = ٤^{\frac{١}{٣}}$ ، $\sqrt[٣]{ح^{٢}} = ح^{\frac{٢}{٣}}$

اذا أمكن التعبير عن العدد بشكل نسبة بين عددين صحيحين (تاليه $\neq$ صفر) تسمى عدداً نسبياً وعليه فالجذور الصماء أعداد غير نسبية .

بند (٦) الجذور الصماء المتشابهة :

يقال للجذور الصماء أنها متشابهة اذا احتوى كل منها (بعد تحويله الى أبسط شكل) على عامل غير نسبي مشترك فمثلا :

$$٢\sqrt{٥} \text{ ، } -٣\sqrt{٥} \text{ ، } \frac{١}{٤}\sqrt{٥} \text{ ، } س\sqrt{٥}$$

جذور صماء متشابهة وكذلك :

$$٢\sqrt{١٨} \text{ ، } -٥\sqrt{٣٢} \text{ ، } ٤\sqrt{٩٨}$$

أمثلة :

$$٢\sqrt{١٨} = ٢\sqrt{٩ \times ٢} = ٢\sqrt{٩} \times \sqrt{٢} = ٦\sqrt{٢} \text{ ،}$$

$$-٥\sqrt{٣٢} = -٥\sqrt{١٦ \times ٢} = -٥\sqrt{١٦} \times \sqrt{٢} = -٢٠\sqrt{٢} \text{ ، .}$$

$$٤\sqrt{٩٨} = ٤\sqrt{٤٩ \times ٢} = ٤\sqrt{٤٩} \times \sqrt{٢} = ٢٨\sqrt{٢}$$

بند (٧) : جمع وطرح الجذور الصماء :

ان الجذور الصماء المتشابهة هي التي يمكن جمعها وطرحها •

مثال : بسط المقدار $2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 4\sqrt{45}$

الحل : المقدار =

$$2\sqrt{4 \times 5} - 3\sqrt{16 \times 5} + 4\sqrt{9 \times 5}$$
$$= 4\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 12\sqrt{5}$$
$$= 4\sqrt{5}$$

بند (٨) : ضرب الجذور الصماء

عند ضرب جذرين أصمين أو أكثر ومن صنف واحد (أي لها نفس دليل الجذر) تضرب عواملها النسبية مع بعضها وكذلك تضرب عواملها غير النسبية •

امثلة :

(١) $3\sqrt[3]{2} \times 5\sqrt[3]{7} = 15\sqrt[3]{14}$

(٢) $أ\sqrt{3} \times ب\sqrt{5} = أب\sqrt{15}$

بند (٩) : قسمة الجذور الصماء :

عند قسمة جذر أصم على جذر أصم آخر ومن نفس الصنف تقسم العوامل النسبية على بعضها وكذلك تقسم العوامل غير النسبية •

مثال :

$$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{54}{8}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

أو $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{9 \times 6}}{\sqrt{4 \times 2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

بند (١٠) تحويل جذر أصم من صنف الى آخر •

يمكن تحويل الجذر الأصم من صنف الى آخر كما في الامثلة التالية :ـ

مثال (١) : $\sqrt[٤]{٥} = ٥^{\frac{١}{٤}} = ٥^{\frac{٣}{١٢}} = \sqrt[١٢]{٥^{٣}}$

مثال (٢) : $\sqrt{ب^{٣}} = ب^{\frac{٣}{٢}} = ب^{\frac{١٥}{١٠}} = \sqrt[١٠]{ب^{١٥}}$

يستفاد من هذه الخاصية في المقارنة بين قيم الجذور ، فلمقارنة قيم جذور من أصناف مختلفة يجب تحويل هذه الجذور الى صنف واحد هو المضاعف المشترك الاصغر لأدلة الجذور •

مثال (٣) : اكتب الجذور التالية مرتبة تنازليا : $\sqrt[٣]{٤}$ ، $\sqrt[٤]{٢}$ ، $\sqrt{٥}$

الحل :

$$\sqrt[٣]{٤} = \sqrt[١٢]{٤^{٤}} = \sqrt[١٢]{٢٥٦}$$

$$\sqrt[٤]{٢} = \sqrt[١٢]{٢^{٣}} = \sqrt[١٢]{٨}$$

$$\sqrt{٥} = \sqrt[١٢]{٥^{٦}} = \sqrt[١٢]{١٥٦٢٥}$$

$$\sqrt{٥} > \sqrt[٣]{٤} > \sqrt[٤]{٢}$$

تمارين (٢)

١ ـ حول كلاً مما يأتي الى جذر من الصنف السادس :

$س$ ، $ص^{٢}$ ، $س^{٣} ص^{٢}$ ، ٤

٢ ـ لاحظ ان كلاً مما يأتي يتكون من معامل وجذر • اكتبه بشكل جذر فقط :

$٥\sqrt{٢}$ ، $م \sqrt[٣]{ب}$ ، $٤\sqrt[٤]{٣}$

٣ ـ حول كلاً مما يأتي الى أبسط شكل ممكن

$\sqrt{١٢٥}$ ، $٢\sqrt[٣]{٥٤}$ ، $٥\sqrt[٤]{٣٢}$

٤ ـــ اوجد قيمة تقريبية لكل من المقادير التالية اذا علمت أن

$$\sqrt{٢} \simeq ١٫٤١٤ \,،\, \sqrt{٣} \simeq ١٫٧٣٢$$

(أ) $٢\sqrt{٣٢} \times ٥\sqrt{٥٠}$

(ب) $٥\sqrt{١٢} - ٢\sqrt{١٨} + ٤\sqrt{٧٢}$

(جـ) $٦\sqrt{٢٤} + ٢\sqrt{٦}$

(د) $\sqrt{٢} + \sqrt{٣}$

ـ الفصـل الرابـع ـ

المتواليـات

(٤ـ١) مفهوم المتتالية :

كثيراً ما نصادف في حياتنا اليومية مجموعـات معينة مثل أسـماء أشهر السنة أو مجموعة لاعبي فريق معين أو الفصول الأربعة أو ..... وغالباً مـا نقرن هذه المجموعات بمجموعة الاعداد الطبيعية الموجبة { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... } كأن نقول اللاعب رقـم (١) أو اللاعب رقم (٢) وهكذا ، كما نقرن مع كل طالب في الصف مثلاً عدداً يوضع أمام أسمه يدل على تسلسله في قائمة أسماء ذلك الصف كالآتي :

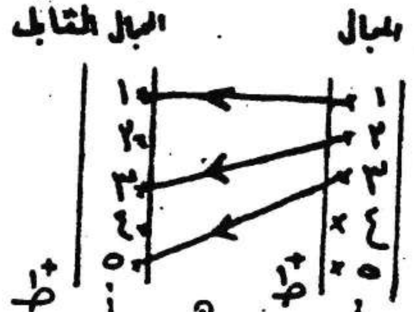
١ ـ عباس ابراهيم
٢ ـ علي ياسين
٣ ـ طلال حسين
٤ ـ محمد خليل
٥ ـ ...... وهكذا

وعند ملاحظتنا للأمثلة أعلاه نرى اننا نقرن كل عنصر من عناصر هذه المجموعـات بعنصـر وحيد من عناصـر المجموعة ط$^+$ حيث ط$^+$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } وبلغة الرياضيات تكون عملية الاقران هذه دالة مجالها مجموعة الاعداد الطبيعية (ط$^+$) ومجالها المقابل المجموعة التي نبحث فيها . ويمكن توضيح هذه الفكرة أكثر بالأمثلـة الآتية :

١ ـ مجموعة الازواج المرتبة { (١ ، ١/٤) ، (٢ ، ١/٢) ، (٣ ، ٣/٤) ، ... }
تمثل دالة مجالها ط$^+$ ومجالها المقابل الاعداد ١/٤ ، ١/٢ ، ٣/٤ ، ...

٢ ـ الدالة د : ط$^+$ ← ط$^+$ حيث د (س) = ٢س − ١ هي مجموعة مجالها المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... } ومجالها المقابل المجموعة

{ ١ ، ٣ ، ٥ ، ... } كما يتبين من التعويض عن الرمز س بالاعـداد ١ ، ٢ ، ٣ ، .... على الترتيب .



٣ ـ التغير ن ← (ـ ١)ⁿ حيث ن عدد صحيح موجب يعني دالة مجالها المجموعة ط+ ومجالها المقابل المجموعة { ـ ١ ، ١ } كما يتبين من التعويض عن ن بالاعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، .... أي ان الدالة هي مجموعة الازواج المرتبة { (١ ، ـ ١) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ـ ١) ، ... } .

يلاحظ في الامثلـة أعـلاه ان مجـال الدالـة هو مجموعـة الاعـداد الطبيعية (ط+) ومجالها المقابل مجموعـة معينة ، ولذلـك فاننا سنستغني عن ذكر المسـاقط الاولى في مجموعة الازواج المرتبة ونكتفي بذكر المساقط الثانية حيث يدرك الـدارس انهـا مرتبة ترتيبـاً يقرن العنصـر الاول بالعـدد (١) والعنصر الثاني بالعدد (٢) ، .... وهكذا .

وستسمي هذه العناصر المرتبة متتالية

وسنكتب الدوال في الامثلة السـابقة كالآتي بعد حصـرها بين قوسين بالشكل : < >

(١) < ½ ، ⅓ ، ¼ ، ... >

(٢) < ١ ، ٣ ، ٥ ، ... >

(٣) < ـ ١ ، ١ ، ـ ١ ، ... >

مما سبق نتوصل الى التعريف الآتي :

لتكن س مجموعة غير خالية ، $ط^+$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }
ان الدالة د : $ط^+$ ← س تسمى متتالية غير منتهية

اما الدالة د : { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ن } ← س حيث ن عدد صحيح موجب تسمى متتالية منتهية .

كما يلاحظ ان حدود المتتالية قد تكون مختلفة كما قد تكون متشابهة مثل < ٤ ، ٤ ، ٤ ، ... > وبما ان حدود المتتالية يجب ان تكتب بترتيب معين ، لذلك فان المتتالية < ١ ، ٣ ، ٥ ، .... > تختلف عن المتتالية < ١ ، ٥ ، ٣ ، ... > .

يرمز للحد الاول من أية متتالية بالشكل $د_١$ أو د (١) وللحد الثاني $د_٢$ أو د (٢) وللحد النوني بالشكل $د_ن$ أو د (ن) حيث ن أي عدد صحيح موجب .

واليك أمثلة أخرى على المتتاليات :

١ ـ اكتب الحدود الاربعة الاولى من المتتالية ن ← ٣ ن − ١

الحل : الدالة التي تعرّف المتتالية هي د (ن) = ٣ن − ١ وبيانها مجموعة الازواج المرتبة {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٨) ... }
بعد التعويض عن ن بالاعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ... على الترتيب . وبأخذ المساقط الثانية من الازواج الأربعة الاولى نجد ان الحدود الاربعة المتتالية هي : ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ .

٢ ـ اكتب المتتالية ن ← ٢ن

الحل : < ٢ ، ٤ ، ٦ ، ... >

٣ ـ اكتب المتالية $ن \to (٣^{ن})$.

الحل : $< ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، \ldots >$

تمارين

١ ـ اكتب المتالية : $ن \to ٢ن - ١$

٢ ـ اكتب المتالية : $ن \to ن^{٢} - ن$

٣ ـ اكتب حدود المتالية $ن \to ٢^{ن} - ١$

٤ ـ اكتب الحدود الخمسة الاولى من المتالية $ن \to ٣ن - ٥$

٥ ـ اكتب الحدود الستة الاولى من المتالية $ن \to ١ - \frac{١}{ن}$

٦ ـ ما هي الحدود الاربعة الاولى من المتالية $ن \to \frac{ن + ١}{ن}$ ؟

٧ ـ اكتب الحدود الثلاثة الاولى من المتالية المعرفة بالدالة

$$د(ن) = ٢ن + (-١)^{ن}$$

٨ ـ ما هي الحدود الثلاثة الاولى من المتالية المعرفة بالدالة

$$د(ن) = (-١)^{ن} + \frac{٢}{ن} \text{ ؟}$$

(٤ ـ ٢) المتاليات الحقيقة والمتاليات العددية

المتاليات التي تكون مجموعتها س (انظر التعريف) هي مجموعة الاعداد الحقيقية ح أو مجموعة جزئية منها تسمى متاليات حقيقية . والامثلة الآتية هي متاليات حقيقية :

(١) $< ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، \ldots >$

(٢) < ٠ ، -١ ، -٢ ، -٣ ، ... >

(٣) < ١/٤ ، ٢/٤ ، ٣/٤ ، ١ ، ... >

(٤) < ٥ ، ٢ ، -١ ، -٤ ، ... >

(٥) < ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... >

(٦) < ٠ ، ٢√ - ١ ، ٣√ - ١ ، ... >

اما المتالية التي تكون فيها س هي المجموعة { تونس ، صنعاء ، بغداد ، عمان ، الرياض } مثلاً هي ليست متالية حقيقية لأن عناصرها لا تنتمي الى ح .

المتوالية العددية: هي متالية حقيقية يكون الفرق بين كل حد من حدودها والحد السابق له ثابت ويسمى أساس المتوالية .

ان الامثلة الاربعة الاولى الواردة اعلاه هي امثلة على متواليات عددية بينما المتاليات في المثالين ٥ ، ٦ فهي ليست متواليات عددية .

ان زيادة كل حد على الحد السابق له في المتوالية الأولى هو (٢) بينما النقصان في الثانية (١) وفي الثالثة الزيادة (١/٤) وفي الرابعة النقصان (٣) . وبذلك يمكن ايجاد أساس المتوالية العددية بطرح أي حدفيها من الحد التالي له مباشرة . ويمكن كتابة اي متوالية عددية اذا علم حدها الأول وأساسها .

مثال (١) :

اكتب المتوالية العددية التي حدها الاول (٣) وأساسها (٥) .

الحل : المتوالية هي : < ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ... >

مثال (٢) :

اكتب المتوالية العددية التي حدها الاول ٧س وأساسها (- ٤) .

الحل : المتولية هي < ٧س ، ٧س - ٤ ، ٧س - ٨ ، ... >

قانون الحد الأخير :

في كل متوالية عددية سنرمز للحد الاول منها بالحرف (أ) وللحد النوني بالرمز (ل) وللأساس بالحرف (ء) . أي ان المتوالية العددية هي :

< أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، ... >

وبناء على ذلك فان :

الحد الاول أو $ل_1$ = أ = أ + ٠ د

الحد الثاني أو $ل_2$ = أ + ١ د

الحد الثالث أو $ل_3$ = أ + ٢ د   وهكذا

ومن ملاحظتنا لهذه الحدود نجد ان كل حد منها يساوي الحد الاول أ زائداً الاساس مضروباً في عدد صحيح هو رتبة ذلك الحد مطروحاً منها واحد

أي أن

الحد السابع مثلاً = أ + ٦ د

والحد الثامن والعشرين = أ + ٢٧ د

= أ + (٢٨ − ١) د

والحد الرابع والثلاثين = أ + (٣٤ − ١) د = أ + ٣٣ د

وبصورة عامة فان الحد النوني = أ + (ن − ١) د

أي أن

$ل_ن$ = أ + (ن − ١) د

والذي نسميه قانون الحد الأخير عندما تكون المتوالية منتهية وعدد حدودها ن

مثال (١) :

جد قيمة الحد الخامس عشر من المتوالية العددية ٠ < ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٠٠٠ >

الحل : ل = أ + (ن − ١) د

وعندما تكون أ = ٣ ، ن = ١٥ ، د = ٦ − ٣ = ٣

فان ل ١٥ = ٣ + (١٥ − ١) × ٣

= ٣ + ١٤ × ٣

= ٣ + ٤٢ = ٤٥

مثال (٢) :

جد الحد التاسع من المتوالية العددية < ٥ ، ١ ، − ٣ ، ٠٠٠٠ >

الحل : $أ = ٥$

$د = ١ - ٥ = -٤$

$ن = ٩$

$ل_{٩} = ؟$

$ل_{ن} = أ + (ن - ١)\, د$

$ل_{٩} = أ + (٩ - ١)\, د$

$ل_{٩} = ٥ + (٩ - ١) \times -٤$

$= ٥ + ٨ \times -٤$

$= ٥ - ٣٢ = -٢٧$

مثال (٣) :

بين فيما اذا كانت كل من المتتاليتين الحقيقيتين الآتيتين تؤلف متوالية عددية ؟ واذا كانت أي منها تؤلف متوالية عددية فجد حدها التاسع عشر .

١ - $\langle$ ٣٦ ، ٢٤ ، ١٤ ، ٨ ، صفر ، . . . . $\rangle$

٢ - $\langle$ ٢٠ ، ١٥ ، ١٠ ، ٥ ، صفر ، . . . $\rangle$

الحل : عند ملاحظتنا للاعداد في (١) نجد أنها لا تؤلف متوالية عددية لأن الفرق بين كل حدين متتاليتين غير ثابت ، حيث أن

$٢٤ - ٣٦ = -١٢$

$١٤ - ٢٤ = -١٠$ ، ولكن $-١٢ \neq -١٠$

بينما الاعداد في (٢) تؤلف متوالية عددية لأن الفرق بين كل عددين متتاليتين فيها ثابت .

$\because$ $أ = ٢٠$ ، $د = ١٥ - ٢٠ = -٥$ ، $ن = ١٩$ ، $ل_{١٩} = ؟$

$\therefore ل_{١٩} = أ + ١٨\, د$

$= ٢٠ + ١٨ \times (-٥)$

$= ٢٠ - ٩٠ = -٧٠$

مثال (٤) :

إذا كونت الاعداد ص − ١ ، ٢ ص^{٢} ، ٣ص + ١ متوالية عددية فما قيمة ص ؟ وماهي الاعداد ؟

الحل : ∵ الاعداد تؤلف متوالية عددية فان :

الحد الثاني − الحد الاول = الحد الثالث − الحد الثاني = الأساس

∴ ٢ص^{٢} − (ص − ١) = (٣ص + ١) − ٢ ص^{٢}

٢ ص^{٢} − ص + ١ = ٣ص + ١ − ٢ص^{٢}

٤ص^{٢} − ٤ص = ٠

او ص^{٢} − ص = ٠

ص (ص − ١) = ٠

ص = صفر او ص = ١

الاعداد هي − ١ ، ٠ ، ١ عندما ص = ٠

او صفر ، ٢ ، ٤ عندما ص = ١

مثال (٥) :

اذا كان الحد السابع من متوالية عددية (١٩) والحد الرابع عشر منها يساوي (٤٠) فما هي المتوالية ؟

الحل : لكتابة المتوالية العددية لابد من معرفة حدها الاول وأساسها

، ∵ الحد السابع = أ + ٦ ى ،

الحد الرابع عشر = أ + ١٣ ى فان :

أ + ١٣ ى = ٤٠ ——— ٢

أ + ٦ ى = ١٩ ——— ١

——————— بالطرح ينتج

٧ى = ٢١

$$\text{د} = \frac{٢١}{٧} = ٣ \text{ الاساس}$$

بالتعويض في معادلة (١) عن د = ٣ ينتج :

$$\text{أ} + ٦ \times ٣ = ١٩$$

$$\text{أ} + ١٨ = ١٩$$

$$\text{أ} = ١ \quad \text{الحد الاول}$$

∴ المتوالية هي : < ١ ، ٤ ، ٧ ، ..... >

الاوساط العددية :

الوسط العددي (الحسابي) :

اذا كونت الاعداد أ، ب ، حـ بهذا الترتيب متوالية عددية كانت ب هي الوسط العددي او الحسابي بين أ ، حـ وحيث ان :

$$\text{ب} - \text{أ} = \text{حـ} - \text{ب}$$

$$٢\text{ب} = \text{أ} + \text{حـ}$$

$$\boxed{\text{ب} = \frac{\text{أ} + \text{حـ}}{٢}}$$

أي ان الوسط العددي بين عددين معلومين يساوي نصف مجموعها . فمثلاً الاعداد ٣ ، ٦ ، ٩ تؤلف متوالية عددية أساسها ٣ . والعدد ٦ هو الوسط العددي بين ٣ ، ٩ .

أما عند ادخال مجموعة من الاعداد بين عددين معلومين بحيث تكون هذه الاعداد مع العددين المعلومين متوالية عددية فأن الاعداد التي ندخلها تسمى بالاوساط العددية او الحسابية . ويكون المجهول فيها هو الاساس حيث يمكن ايجاده باستعمال قانون الحد الاخير .

مثال : ادخل ثلاثة اوساط عددية بين ٧ ، ١٩ .

الحل : ∵ عدد الاوساط = ٣ فتكون المتوالية بالشكل :

< ٧ ، ٧ + ء ، ٧ + ٢ء ، ٧ + ٣ء ، ١٩ >

∴ عدد الحدود = ٥ وذلك باضافة الحد الاول والحد الاخير الى عدد الاوساط .

، الحد الاول = ٧

، الحد الاخير = ١٩

، الاساس = ؟

لن = أ + (ن − ١) ء

١٩ = ٧ + (٥ − ١) د

١٩ − ٧ = ٤ د

١٢ = ٤ د

ء = ٣ الاساس

∴ المتوالية هي < ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ >

والاوساط العددية هي ١٠ ، ١٣ ، ١٦

تمـارين

١ ـ جد الحد التاسع من المتوالية العددية. < ٥ ، ٨ ، ١١ ، ... >

٢ ـ جد الحد الثامن والعشرين من المتوالية العددية < ١/٣ ، ٢/٣ ، ١ ، ... >

٣ ـ اذا كان العدد (١١٨) هو أحد حدود المتوالية العددية < ١٠ ، ١٦ ، ٢٢ ، ... > فما هو ترتيبه ؟

٤ ـ ادخل (٣) اوساط عددية بين ٢ و ١٤ .

٥ ـ ادخل (٥) اوساط عددية بين ١٧ و ٤٧ .

٦ ـ الحد الخامس عشر من متوالية عددية (٧٥) والحد الثاني والعشرين منها (١١٠) فما هي المتوالية ؟

٧ ـ اذا كان مجموع الحدين الاول والخامس من متوالية عددية يساوي (صفراً) والحد الثامن منها يساوي (١٥) . فما هي المتوالية ؟

٨ ـ اذا كونت الاعداد $س^{2} + 1$ ، س ، س − ١ متوالية عددية ذات ثلاثة حدود فما قيمة س ، وما هي الاعداد ؟

٩ ـ الحد الاول من متوالية عددية هو ($س^{2} + 4$) والحد الثاني منها هو $(س + 2)^{2}$ والحد العاشر يساوي (٨٠) . فما أساسها وما قيمة س

مجموع حدود متوالية عددية منتهية :

اذا كان عدد حدود متوالية عددية هـو ن وحدها الاول (أ) وحدها الأخير (ل) فان مجموع حدودها (جـ) معطى بالقانون الآتي :

$$\boxed{\text{جـ} = \frac{\text{ن}}{2}\left(\text{أ} + \text{ل}\right)} \quad \cdots\cdots (1)$$

مثال :

جـد مجموع حدود المتوالية العددية < ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ٢٠ >

الحل : بما أن ن = ٦ ، أ = ٥ ، ل = ٢٠

بالتعويض بالقانون نجد ان :

$$\text{ج} = \frac{٦}{٢}\left(٥ + ٢٠\right) = ٣ \times ٢٥ = ٧٥$$

يستعمل القانون(١)لايجاد مجموع حدود متوالية عددية علم حدها الاول وحدها الأخير وعدد حدودها ن .

بما ان $\quad \text{ل} = \text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}$

$$\text{ج} = \frac{\text{ن}}{٢}\left(\text{أ} + \text{ل}\right)$$

اذن : $\quad \text{ج} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[\text{أ} + \text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right]$

أي أن : $\quad \boxed{\text{ج} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right]} \quad \cdots\cdots (٢)$

يستعمل القانون (٢) لايجاد مجموع الحدود الـ ن الاولى من متوالية عددية علم حدها الاول (أ) واساسها (د) .

مثال :

جد مجموع الحدود العشرين الاولى من المتوالية العددية< ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... >

الحل : $\text{أ} = ٣$ ، $\text{د} = ٥ - ٣ = ٢$ ، $\text{ن} = ٢٠$

$$\therefore \; = \frac{٢}{٢٠}\left[٢ \times ٣ + (٢٠ - ١) \times ٢\right]$$

$$= ١٠\,[\,٦ + ١٩ \times ٢\,]$$

$$= ١٠\,[\,٦ + ٣٨\,]$$

$$= ١٠ \times ٤٤ = ٤٤٠$$

امثلة اخرى :

مثال (١) :

ما مجموع (٢٠) حداً الاولى من متوالية عددية حدها الاول (٢) وحدها الاخير (٥٨) ؟

الحـل :

$$ج = \frac{ن}{٢}\,(\,أ + ل\,)$$

$$\therefore\ ج = \frac{٢٠}{٢}\,(\,٢ + ٥٨\,)$$

$$ج = ١٠ \times ٦٠ = ٦٠٠$$

مثال (٢) :

ما عدد حدود متوالية عدية حدها الاول (− ٣) وحدها الاخير(− ١٦) ومجموعها (− ١٣٣) ؟

الحل :

$$ج = \frac{ن}{٢}\,(\,أ + ل\,)$$

$$-١٣٣ = \frac{ن}{٢}\,[\,-٣ + (-١٦)\,]$$

$$-١٣٣ = \frac{ن}{٢} \times -١٩$$

$$-٢٦٦ = -١٩ن$$

$$\therefore ن = \frac{-٢٦٦}{-١٩} = ١٤ \text{ حد}$$

مثال (٣) :

صاحب دكان خسر في الاسبوع الاول من موسم معين استمر لمدة (٢٠) أسبوعاً مبلغ (٦) دنانير وفي الاسبوع الثاني (٤٫٥) ديناراً وفي الاسبوع الثالث (٣) دنانير وهكذا استمرت الخسارة تتناقص على هذا المنوال ٠ جد :

(١) ربحه في الاسبوع العاشر

(٢) صافي الربح او الخسارة بعد (٢٠) اسبوع ٠

الحل : ان الخسائر والارباح الاسبوعية تكوّن متوالية عددية منتهية عدد حدودها ٢٠

$$\langle -٦ ، -٤٫٥ ، -٣ ، \cdots \rangle$$

$$\therefore د = -٣ - (-٤٫٥) = -٣ + ٤٫٥ = ١٫٥$$

$$أ = -٦$$

وبما ان $ل_{١٠} = أ + ٩ د$

$$\therefore ل_{١٠} = -٦ + ٩ \times ١٫٥$$

= -٦ + ١٣٫٥ = ٧٫٥ دينار ربح صاحب الدكان في الاسبوع العاشر

اما صافي الربح أو والخسارة بعد (٢٠) اسبوع فهو مجموع عشرين حداً من هذه المتوالية ٠

$$\text{جـ} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + (\text{ن}-١)\,\text{د}\right]$$

$$\text{جـ} = \frac{٢٠}{٢}\left[-١٢ + (٢٠-١)\times ١٫٥\right]$$

$$\text{جـ} = ١٠\left[-١٢ + ١٩\times ١٫٥\right]$$

$$\text{جـ} = ١٠\left[-١٢ + ٢٨٫٥\right]$$

جـ = ١٠ × ١٦٫٥ = ١٦٥ دينارا صافي الربح بعد (٢٠) اسبوع .

مثال (٤) :

جد مجموع الاعداد الصحيحة المحصورة بين ١ ، ١٠٠

الحـل :

$$\text{جـ} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[\text{أ} + \text{ل}\right]$$

$$\text{ن} = ١٠٠ \text{ ، } \text{أ} = ١ \text{ ، } \text{ل} = ١٠٠$$

$$\therefore \text{جـ} = \frac{١٠٠}{٢}\left(١ + ١٠٠\right)$$

$$= ٥٠\,(١٠١) = ٥٠٥٠$$

مثال (٥) :

كم حداً يلزم أخذها من المتوالية < ٤٢ ، ٣٩ ، ٣٦ ، ... > ليكون مجموعها ٣١٥ ابتداء من الحد الاول ؟

الحل : أ = ٤٢ ، د = ٣٩ − ٤٢ = −٣ ، جـ = ٣١٥ ، ن = ؟

$$\text{ح} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[\,٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\,\right]$$ وبالتعويض ينتج :

$$٣١٥ = \frac{\text{ن}}{٢}\left[\,٢ \times ٤٢ + (\text{ن} - ١) \times -٣\,\right]$$ بضرب الطرفين في العدد (٢) ينتج

$$٦٣٠ = \text{ن}\left[\,٨٤ - ٣\text{ن} + ٣\,\right]$$
$$٦٣٠ = ٨٤\,\text{ن} - ٣\,\text{ن}^{٢} + ٣\text{ن}$$
$$٣\,\text{ن}^{٢} - ٨٧\,\text{ن} + ٦٣٠ = ٠$$
$$\text{ن}^{٢} - ٢٩\,\text{ن} + ٢١٠ = ٠$$
$$(\text{ن} - ١٤)(\text{ن} - ١٥) = ٠$$

أما $\text{ن} - ١٤ = ٠ \quad \therefore \text{ن} = ١٤$ حداً

او $\text{ن} - ١٥ = ٠ \quad \therefore \text{ن} = ١٥$ حداً

تمارين

١ ـ احسب مجموع الـ (١٥) حداً الاولى من المتوالية العددية < −٢ ، ٢ ، ٦ ، ... >

٢ ـ ما مجموع الـ(١٠) حدود الاولى من المتوالية العددية < ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ... >

٣ ـ جد مجموع المتوالية العددية < ١٢ ، ٩ ، ٦ ، ... > الى (٣٢) حداً .

٤ ـ جد مجموع المتوالية العددية < $٣\frac{١}{٢}$ ، ١ ، $-١\frac{١}{٢}$ ، ... > الى ١٤ حداً .

٥ ـ كم حداً يؤخذ من المتوالية العددية < ٢٠٠ ، ١٧٥ ، ١٥٠ ، ... > ابتداء من الحد الاول ليكون مجموعها صفراً ؟

٦ ـ الحد الخامس من متوالية عددية (١٣) وحدها الثاني عشر (٣٣) فما هو مجموع عشرين حداً منها ؟

٧ ـ مر رجل بعدد من الايتام فأعطى الاول منهم ديناراً والثاني دينارين والثالث ثلاثة دنانير ، وهكذا . . . ، ولو انه وزع ما عنده عليهم

بالتساوي لنال كل يتيم منهم عشرين ديناراً . فكم يتيماً كانوا ؟ وكم هو المبلغ الذي وزعه ؟

الجواب : (٣٩ ، يتيماً ، ٧٨٠ ديناراً) .

٨ - مجموع الحدين الثاني والثالث من متوالية عددية (-٣) وحدها الثامن (١٥) فما هي المتوالية ؟

(٣.٤) المتواليات الهندسية :

لاحظ المتتاليات الحقيقية الآتية :

١ - < ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ... >

٢ - < ٥ ، -١٥ ، ٤٥ ، -١٣٥ ، ... >

٣ - < ١ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٦٤}$ ، ... >

٤ - < س ، س ص ، س ص^{٢} ، س ص^{٣} ، ... >

حيث ص عدد صحيح موجب ، س عدد حقيقي موجب

تجد ان كل حد بعد الحد الاول مباشرة من كل واحدة منها يساوي الحد الذي قبله مضروباً في عدد ثابت يسمى أساس المتتالية والذي يمكن الحصول عليه من قسمة أي حد فيها بعد الاول على الحد السابق له .

فأساس المتتالية الاول هو (٢) لأن $\frac{٦}{٣} = \frac{١٢}{٦} = ... = ٢$

وأساس المتتالية الثانية هو (- ٣) لأن $\frac{١٥}{٥} = \frac{٤٥}{١٥} = ... = -٣$

وأساس المتتالية الثالثة هو ($\frac{١}{٤}$) لأن : $\frac{\frac{١}{٤}}{١} = \frac{\frac{١}{١٦}}{\frac{١}{٤}} = \cdots = \frac{١}{٤}$

وأساس المتتالية الرابعة هو (ص) لأن : $\frac{\text{س ص}}{\text{س}} = \frac{\text{س ص ص}}{\text{س ص}} = \cdots = \text{ص}$

نسمي مثل هذه المتتاليات بـ (المتواليات الهندسية)

بما ان اساس المتوالية الهندسية الاولى هو(٢)وان قيم حدودها متزايدة فاننا نسميها متوالية هندسية تصاعدية .

وبما ان اساس المتوالية الهندسية الثالثة هو ($\frac{١}{٤}$) وان قيم حدودها متناقصة فاننا نسميها متوالية هندسية تنازلية ،

اما المتوالية الثانيه فان اساسها عدد صحيح سالب ولهذانسميها متوالية هندسية متناوبة والمتوالية الاخيرة هي متوالية متزايدة لان اساسها عدد صحيح موجب هو (ص) .

اما المتواليات التي تكون قيم حدودها ثابتة مثل :

< ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٩ ، ... > فهي متوالية هندسية اساسها (١) أو متوالية عددية أساسها صفر .

يرمز للحد الاول من المتوالية الهندسية بالحرف أ ، ولاساسها بالحرف ر ولحدها الذي رتبته ن (أي الحد النوني) بالرمز ل ن ، ولعدد حدودها ن ولمجموعها حـ اذا كانت منتهية . تكتب المتوالية الهندسية بالصيغة العامة الآتية:

< أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، أ $ر^٣$ ، ... > حيث كل من أ ، ر عدد حقيقي .

قانون الحد النوني للمتوالية الهندسية :

من الصيغة العامة للمتواليات الهندسية نجد أن :

الحد الاول $= \text{أ} = \text{أ} \times \text{ر}^{\text{صفر}}$ لان $\text{ر}^{\text{صفر}} = ١$

الحد الثاني $= \text{أ ر} = \text{أ} \times \text{ر}^{١}$

الحد الثالث $= \text{أ ر}^{٢} = \text{أ} \times \text{ر}^{٢}$

الحد الرابع $= \text{أ ر}^{٣} = \text{أ} \times \text{ر}^{٣} = \text{أ} \times \text{ر}^{٤-١}$

الحد الخامس $= \text{أ ر}^{٤} = \text{أ} \times \text{ر}^{٤} = \text{أ} \times \text{ر}^{٥-١}$

وبصورة عامة فان :

الحد النوني $= \text{أ} \times \text{ر}^{\text{ن}-١}$

$$\therefore \quad \boxed{\text{ل}_{\text{ن}} = \text{أ ر}^{\text{ن}-١}}$$

مثال (١) :

جد الحد السابع من المتوالية الهندسية < ٢ ، ٦ ، ١٨ ، .... >

الحل : أ = ٢ ، $\text{ر} = \frac{٦}{٢} = ٣$ ، ن = ٧ ، $\text{ل}_{٧} = ؟$

$\text{ل}_{٧} = \text{أ ر}^{٦}$

$= ٢ \times ٣^{٦}$

$= ٢ \times ٧٢٩ = ١٤٥٨$ الحد السابع

مثال (٢) :

ما رتبة الحد الذي قيمته ١٠٢٤ من المتوالية الهندسية <١ ، ٤ ، ١٦ ، ....>

الحل : نفرض ان رتبه الحد الذي قيمته ١٠٢٤ من المتوالية اعلاه = ن

$\therefore$ أ = ١ ، ر = $\frac{٤}{١}$ ، ن = ١٠٢٤ ، ن = ؟

$$ل_ن = أ ر^{ن-١}$$

$$١٠٢٤ = ١ \times ٤^{ن-١}$$

$$٤^٥ = ٤^{ن-١}$$

$$٥ = ن - ١$$

$\therefore$ ن = ٦ $\therefore$ رتبة الحد الذي قيمته ١٠٢٤ هي السادسة .

مثال (٣) :

اكتب المتوالية الهندسية التي حدها العاشر (٣٢٠) وحدها السادس (٢٠)

الحل : الحد العاشر = أ ر^٩

الحد السادس = أ ر^٥

$\therefore$ أ ر^٩ = ٣٢٠ ....(١)

أ ر^٥ = ٢٠ ....(٢)

بقسمة (١) على (٢) ينتج :

$$\frac{أ ر^٩}{أ ر^٥} = \frac{٣٢٠}{٢٠}$$

$$ر^٤ = ١٦ = ٢^٤$$

$\therefore$ ر = ٢ الاساس . وبالتعويض في (٢) عن ر = ٢ ينتج :

$$أ \times ٢^٥ = ٢٠$$

$$أ \times ٣٢ = ٢٠$$

$\therefore$ أ = $\frac{٢٠}{٣٢} = \frac{٥}{٨}$ الحد الاول

∴ المتوالية هي < ... ، $\frac{٥}{٨}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ، ٥ ، ١٠ ، ... >

الوسط الهندسي :

اذا كانت الاعداد أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متوالية هندسية فأن ب يسمى الوسط الهندسي بين أ ، جـ •

بما أن $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$

فأن $ب^{٢} = أ\,جـ$

او $ب = \pm\sqrt{أ\,جـ}$.

مثال :

جد الوسط الهندسي بين − ١ و − ٤

الحل : أ = − ١

جـ = − ٤

الوسط الهندسي $ب = \mp\sqrt{(-١)(-٤)} = \mp\sqrt{٤} = \mp ٢$

الاوساط الهندسية :

الاوساط الهندسية بين عددين معلومين هي مجموعة الاعداد المحصورة بين هذين العددين والتي تؤلف معها متوالية هندسية •

ولايجاد الاوساط الهندسية نستعمل قانون الحد النوني الذي هو :

$ل_{ن} = أ\,ر^{ن-١}$ حيث يكون المجهول فيها هو (ر)

مثال :

أدخل (٤) أوساط هندسية بين ٥ ، ١٦٠ ،

الحل : ∵ عدد الاوساط = ٤

عدد الحدود ن = ٤ + ٢ = ٦

، أ = ٥

$ل_ن$ = ١٦٠

ر = ؟

$ل_ن = أ\ ر^{ن-١}$

$١٦٠ = ٥ \times ر^{٦-١}$

$١٦٠ = ٥\ ر^{٥}$

$$\frac{١٦٠}{٥} = ر^{٥}$$

$٣٢ = ر^{٥}$

$٢^{٥} = ر^{٥}$

∴ ر = ٢ الاساس

∴ المتوالية الهندسية هي < ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠ ، ١٦٠ >

الاوساط الهندسية هي : ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠

تمـــارين

١ ـ جد الحد السابع من المتوالية الهندسية < ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ... >

٢ ـ جد الحد السادس من المتوالية الهندسية التي حدها الأول $\frac{1}{2}$ واساسها ٢ .

٣ ـ ما أساس المتوالية الهندسية التي حدها الاول $\frac{1}{2}$ وحدها السابع ٣٢ ؟

٤ . ادخل (٤) اوساط هندسية بين ٨١ ، $\frac{1}{3}$

٥ ـ ادخل (٣) اوساط هندسية بين ٦ ، ٤٨٦ .

٦ ـ الحد الثاني من متوالية هندسية (٦) وحدها الخامس (٤٨) . فما هو أساسها ؟

٧ ـ هل العدد $\frac{1}{9}$ هو حد في المتوالية الهندسية < ٩ ، ٣ ، ١ ، ... >

وهل العدد $\frac{1}{24}$ هو حد فيها ؟

٨ ـ الحد الخامس من متوالية هندسية (٨) والحد التاسع منها ($\frac{1}{2}$) .
جد حدها الاول واساسها .

٩ ـ سيارة مستعملة ثمنها الان (١٠٠٠) دينار . ويقل ثمنها سنوياً ٢٠٪ عن السنة السابقة لها . جد ثمنها بعد ٦ سنوات من الآن .

قانون مجموع حدود متوالية هندسية :

علمنا من الصيغة العامة لمتوالية هندسية منتهية عدد حدودها ن هي :

$$< \text{أ} ، \text{أ}\,\text{ر} ، \text{أ}\,\text{ر}^{2} ، \text{أ}\,\text{ر}^{3} ، \ldots\ldots \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-1} >$$

$$\therefore \text{ج} = \text{أ} + \text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{2} + \text{أ}\,\text{ر}^{3} + \ldots + \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-1} \quad \ldots (1)$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة في ر ينتج ان :

$$\text{ج}\,\text{ر} = \text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{2} + \text{أ}\,\text{ر}^{3} + \ldots + \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-1} + \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}} \quad \ldots (2)$$

وبطرح طرفي المعادلة (١) من المعادلة (٢) ينتج ان :

$$\text{حـ ر} - \text{حـ} = \text{أ ر}^{\text{ن}} - \text{أ}$$

$$\text{حـ} (\text{ر} - ١) = \text{أ} (\text{ر}^{\text{ن}} - ١)$$

$$\therefore \text{حـ} = \frac{\text{أ} (\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} \text{ ، ر} \neq ١$$

$$\text{أو حـ} = \frac{\text{أ} (١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}} \text{ ، ر} \neq ١$$

عادة تستعمل الصيغة الأولى عندما ر > ١ وتستعمل الصيغة الثانية عندما ر < ١

$\because$ الحد الاخير ل = أ $\text{ر}^{\text{ن}-١}$ فمن الممكن وضع الصيغ بالاشكال

$$\text{حـ} = \frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١} \text{ ، ر} \neq ١$$

$$\text{او حـ} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{١ - \text{ر}} \text{ ، ر} \neq ١$$

أي ان حـ معطاة بدلالة الحد الاول أ والحد الاخير ل والاساس ر .

مثال (١) :

جد مجموع (٥) حدود من المتوالية الهندسية < ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ... >

الحل : أ = ٢ ، ر = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ ، ن = ٥ ، حـ = ؟

$$\text{ح} = \frac{\text{أ}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} = \frac{٢\,(٣^{٥} - ١)}{٣ - ١} = \frac{٢\,(٢٤٣ - ١)}{٢} = ٢٤٣ - ١ = ٢٤٢$$

مثال (٢) :

جد مجموع حدود المتوالية الهندسية التي حدها الأول (١) وأساسها (٣) وحدها الأخير (٢٤٣) •

الحل :

$$\text{ح} = \frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١} \quad \text{حيث أ} = ١ \text{ ، ر} = ٣ \text{ ، ل} = ٢٤٣$$

$$\text{ح} = \frac{٢٤٣ \times ٣ - ١}{٣ - ١} = \frac{٧٢٩ - ١}{٢} = \frac{٧٢٨}{٢} = ٣٦٤$$

تمارين

١ ـ جد مجموع (٥) حدود من المتوالية الهندسية < ١ ، ٣ ، ٩ ، ... >

٢ ـ جد مجموع (٧) حدود من المتوالية < $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، ... >

٣ ـ جد مجموع المتوالية < ٢ ، ٤ ، ٨ ، ... > الى (٥) حدود ثم جد مجموع للمتوالية < ٢ ، ٧ ، ١٢ ، ... > الى (٥) حدود . هل المجموعان متساويان ؟

٤ ـ جد مجموع (٦) حدود من المتوالية الهندسية التي حدها الأول ٣ وحدها السادس $\frac{٣}{٣٢}$ وأساسها $\frac{١}{٢}$

٥ ـ الحد الرابع من متوالية هندسية (١٦) وحدها الثاني (٤) . فما مجموع (٧) حدود منها ؟

٦ ـ ما عدد الحدود اللازم أخذها من المتوالية < ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... > ليكون مجموعها ١٨٩ ؟

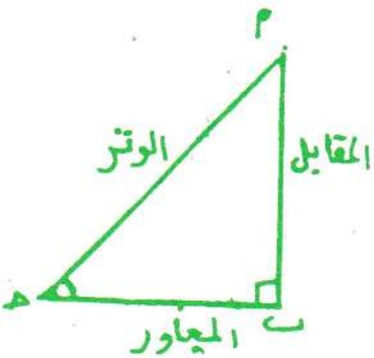
ـ الفصل الخامس ـ

المثلثـات

بند (١) : النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية :

ان للنسب المثلثية للزاوية أهمية عظمى في الرياضيات فهي موضوع علم المثلثات وقد اتفق على اعطاء اسماء خاصة لهذه النسب تسهيلا لاستعمالها والاستفادة منها •

الشكل (١) مثلث قائم الزاوية في ب •



شكل (١)

أب اي طول الضلع المقابل للزاوية الحادة حـ
النسبة ــــ (ــــــــــــــــــــ)
أحـ طول الوتر

تسمى جيب الزاوية جـ وتكتب مختصرة جاحـ ،

بحـ اي طول الضلع المجاور للزاوية الحادة حـ
والنسبة ــــ (ــــــــــــــــــــ) ، تسمى جيب تمام
أحـ طول الوتر

الزاوية حـ وتكتب مختصرة جتا حـ

أب اي طول الضلع المقابل للزاوية الحادة حـ
والنسبة ــــ (ــــــــــــــــــــ)تسمىظل الزاوية حـ
بحـ طول الضلع المجاور للزاوية الحادة حـ

وتكتب مختصرة ظا حـ •

ومن الواضح ان النسب المثلثية للزوايا هي اعداد مجردة أي خالية من الوحدات .

مثال (١) : أب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، طول أب = ٤ سم ، وطول بحـ = ٣سم جد حاأ ، طاحـ ، جتاأ

الحل : بما أن :

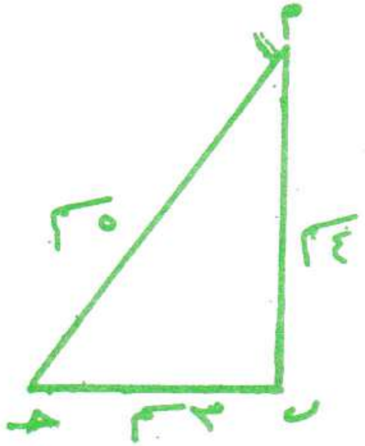
$$(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$$

$$\therefore \text{أ جـ} = \sqrt{٤^{٢} + ٣^{٢}} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥\text{سم}$$

$$\text{جا أ} = \frac{\text{بجـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٣}{٥}$$

$$\text{طا جـ} = \frac{\text{أب}}{\text{بجـ}} = \frac{٤}{٣}$$

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{٤}{٥}$$



شكل (٢)

ملاحظة : أن النسبة المثلثية لزاوية معينة لها قيم ثابتة في أي مثلث كانت هذه الزاوية وتتضح لنا هذه الحقيقة باستذكارنا موضوع التشابه بين المثلثات الذي درسناه في موضوع الهندسة في العام الماضي .

ان قيم النسب المثلثية لجميع الزوايا الحادة (من صفر الى ٩٠°) معطاة في جداول خاصة محسوبة بطرق رياضية عالية .

بند (٢) : النسب المثلثيّة للزوايا ٣٠° ٤٥° ٦٠°

من الممكن ان نحصل على قيم النسب المثلثية لبعض الزوايا دون الرجوع الى الجداول الخاصة اوالى القياس وذلك كما يلي :

(١) لايجاد النسب المثلثية للزاويتين ٣٠° ، ٦٠° نرسم مثلثاً متساوي الاضلاع كما في شكل (٣) طول كل ضلع من أضلاعه = ٢ وحدة ثم ننزل من الرأس أ عموداً على القاعدة فينصفها وينصف زاوية الرأس ، ولما كان قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع = ٦٠° فيكون قياس زاوية بأد = ٣٠° وحسب نظرية فيثاغورس يكون طول أد = $\sqrt{٣}$ وحدة وعلى هذا فان :

$$\text{جا } ٣٠ = \frac{\text{بد}}{\text{أب}} = \frac{١}{٢}$$

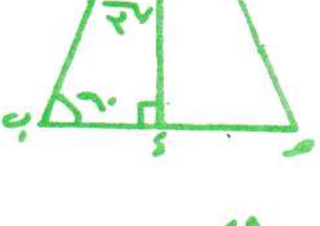
$$\text{جتا } ٣٠ = \frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\text{ظا } ٣٠ = \frac{\text{بد}}{\text{أد}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

$$\text{جا } ٦٠° = \frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\text{جتا } ٦٠° = \frac{\text{بد}}{\text{أب}} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ظا } ٦٠ = \frac{\text{أد}}{\text{بد}} = \sqrt{٣}$$

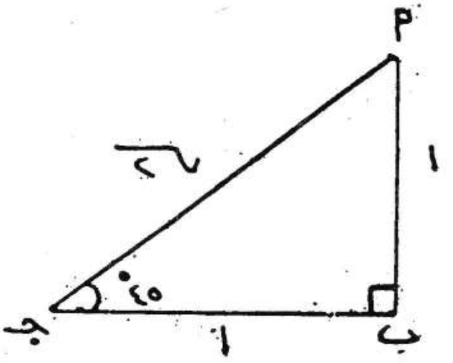


شكل (٢)

(٢) لايجاد النسب المثلثية للزاوية ٤٥ نرسم مثلثاً قائم الزاوية ومتساوي الساقين طول كل ساق = ١ وحدة كما في الشكل (٤) قياس كل زاوية من الزاويتين الحادتين = ٤٥ ٠

وحسب نظرية فيثاغورس يكون طول الوتر $\sqrt{٢}$ وحدة

وعلى هذا فأن :



شكل (٤)

$$\text{جا } ٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{جتا } ٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{ظا } ٤٥^\circ = ١$$

تمارين (١)

جد القيم العددية لكل مما يلي

١) $\text{جتا } ٣٠^\circ \text{ حا } ٦٠^\circ - \text{حا } ٣٠^\circ \text{ جتا } ٦٠^\circ$

٢) $$\frac{٤\text{جا}^٢ ٣٠^\circ + \text{ظا}^٢ ٤٥^\circ}{٣\text{ظا}^٢ ٣٠^\circ + ٢\text{جا } ٣٠^\circ}$$

٣) $(\text{ظا } ٤٥^\circ - \text{حا } ٣٠^\circ)(\text{ظا } ٤٥^\circ + \text{جتا } ٦٠^\circ)$

برهن على صحة كل من العلاقات التالية :

٤) $$\frac{\text{ظا } ٤٥^\circ - \text{ظا } ٣٠^\circ}{١ + \text{ظا } ٤٥^\circ \text{ ظا } ٣٠^\circ} = \frac{\text{ظا } ٦٠^\circ - \text{ظا } ٤٥^\circ}{\text{ظا } ٤٥^\circ + \text{ظا } ٦٠^\circ}$$

٥) $$\text{ظا}^٢ ٦٠^\circ - \text{ظا}^٢ ٣٠^\circ = \frac{\text{جا}^٢ ٦٠^\circ - \text{جتا}^٢ ٦٠^\circ}{\text{جتا}^٢ ٦٠^\circ \times \text{جتا}^٢ ٣٠^\circ}$$

٦) $جا^2 ٤٥° + جتا^2 ٤٥° = ١$

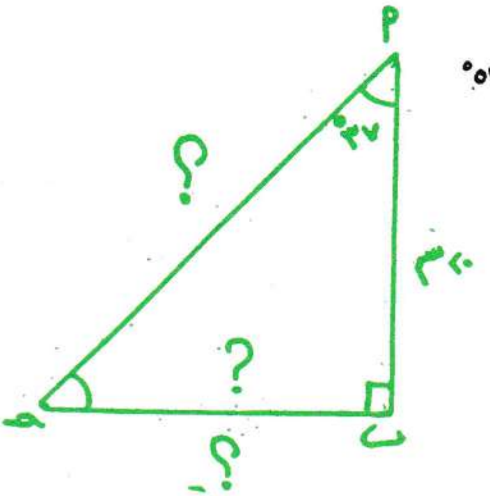
بند (٣) حل المثلث القائم الزاوية :

من المعلوم ان لكل مثلث ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا فاذا علمت بعض عناصر المثلث (من اضلاع وزوايا) فقد يكون من السهل معرفة العناصر الاخرى وان عملية إيجاد عناصر المثلث المجهولة تسمى عملية حل المثلث •

وسوف نستخدم النسب المثلثية لحل المثلث القائم الزاوية •

مثال (٢) : حل المثلث أبجـ الذي فيه ∢ ب قائمة ق ∢ أ = ٣٧° ،وطول

أ ب = ٢٠ سم علماً بأن طا ٣٧° = $\frac{٣}{٤}$:



شكل (٥)

الحل : في الشكل (٥)

١) ق ∢ جـ = ٩٠° − ٣٧° = ٥٣°

٢) طا ٣٧° = $\frac{بجـ}{أب}$ •

∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{بجـ}{٢٠}$

بجـ = $\frac{٣ \times ٢٠}{٤}$ = ١٥ سم

نستخدم نظرية فيثاغورس لايجاد طول أحـ •

$(أجـ)^2 = (أب)^2 + (بجـ)^2 = (٢٠)^2 + (١٥)^2 = ٤٠٠ + ٢٢٥ = ٦٢٥$ •

∴ (أحـ) = ٢٥سم • وبذلك أصبحت كل عناصر المثلث معلومة •

تمارين

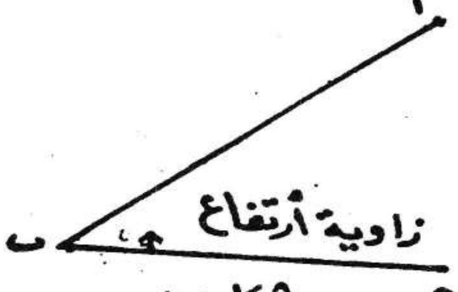
(١) حل المثلث أبحـ القائم الزاوية في أ والذي فيه طول أحـ = ٤سم ، طول حـ ب = ٨سم .

(٢) حل المثلث س ص ع الذي فيه ق ∡ س = ٣٠° ، ق ∡ ع = ٦٠° ، طول س ع = ٢٠سم .

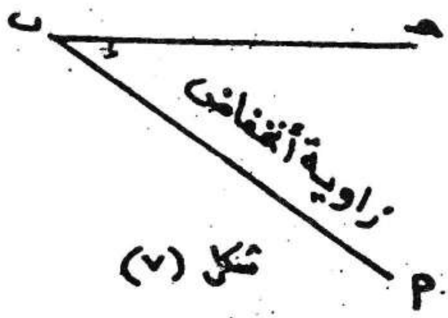
(٣) حل المثلث س ص ع القائم الزاوية في ص والذي فيه س ص = ص ع = ١٥سم .

بند (٤) : زوايا الارتفاع والانخفاض :

اذا كان بحـ مستقيماً افقياً ، أنقطة في نفس المستوي الشاقولي المار من ب حـ فعندما تكون أ اعلى بالنسبة الى المستوي الأفقي المار من ب حـ فان الزاوية أ ب حـ تسمى زاوية ارتفاع أ بالنسبة الى ب كما في الشكل (٦) ، واذا كانت أ اوطأ من هذا المستوي فان الزاوية أ ب حـ تسمى زاوية انخفاض بالنسبة الى ب كما في الشكل (٧) .



شكل (٦)



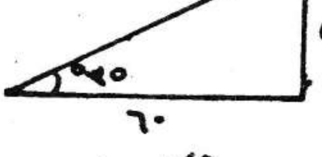
شكل (٧)

مثال (٣) : من نقطة تبعد عن قاعدة مئذنة بمقدار ٦٠ متراً وجد ان قياس زاوية ارتفاع قمة المئذنة ٣٠° ، فما ارتفاع المئذنة ؟

الحل : نفرض ارتفاع المئذنة = س من الأمتار

من الشكل (٨) نلاحظ ان : طا ٣٠° = $\frac{س}{٦٠}$

س = ٦٠ طا ٣٠°



شكل (٨)

$٦٠ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٣٤٫٦٤ متراً تقريباً ارتفاع المئذنة .

ملاحظة : تعتبر المئذنة والاعمدة والابنية والاشجار قائمة على ارض أفقية .

تمارين

(١) نظر رجل من سطح منزل الى سيارة واقفة في الشارع فوجد ان قياس زاوية انخفاضها ٤٥° ، ما بعد السيارة عن الرجل اذا كان ارتفاع المنزل = ٤م .

(٢) من قمة مئذنة شاهد رجل كرة على سطح الارض فاذا كان موضع الكرة يبعد ٥٧م عن موقع المئذنة ما ارتفاع المئذنة اذا كانت زاوية انخفاض موضع الكرة هي ٦٠° .

(٣) من نقطة تبعد بمقدار ٦٠ متر عن قاعدة بناية وجد ان زاوية ارتفاع اعلى البناية هي ٣٠° فما ارتفاع هذه البناية ؟

(الفصل السادس)

المجسمات

ستتعرف من خلال دراستنا لهذا الفصل بعض الأجسام وكيفية ايجاد مساحاتها السطحية الجانبية والكلية وحجومها .

والجسم مجموعة غير منتهية من النقط تعتبر مجموعة جزئية من نقط الفراغ محددة بسطح . وما الاشكال الهندسية التي يقع نظرنا عليها دائما مثل الكرةوالسبورة والكتاب وغيرها الا عبارة عن مجموعات غير منتهية من النقط محتواة في الفضاء الذي يحيط بنا وهو أيضاً مجموعة غير منتهية من النقط .

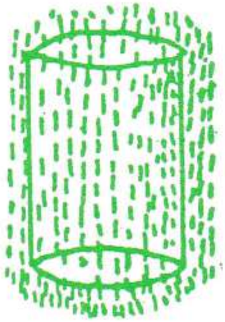
انّ السطح المحيط بجسم ما يقسم الفضاء الىمجموعات ثلاث من النقط هي :

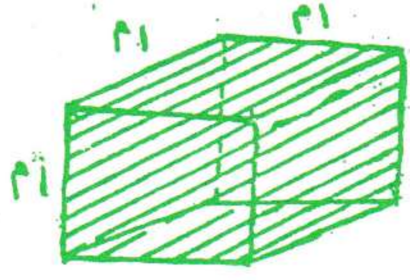
(١) مجموعة النقط التي تقع داخل الجسم ،

(٢) مجموعة النقط التي تقع خارج الجسم ،

(٣) مجموعة نقط السطح نفسه والتي تسمى بالسطح الخارجي للجسم ،

وعليه فأن اتحاد مجموعة النقط التي تقع داخل الجسم مع نقط سطحه الخارجي تشكل الجسم .





الاجسام المنتظمة :

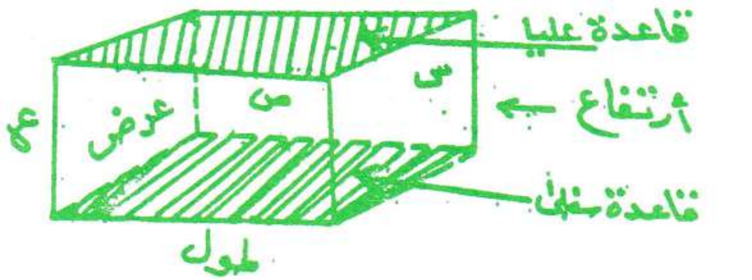
ان الأجسام التي سنقوم بدراستها خلال هذا الفصل من حيث خواصها ومساحتها السطحية الجانبية والكلية وحجومها هي :

(١) متوازي المستطيلات والمكعب (٢) المنشور القائم والأسطوانة الدائرية القائمة (٣) الهرم المنتظم والمخروط الدائري القائم (٤) الكرة .

(١) متوازي المستطيلات والمكعب :

ان علبة الكبريت او الطابوقة المنتظمة تمثل جسماً بشكل متوازي مستطيلات فهو محاط بستة أوجه مستوية ومستطيلة الشكل تسمى أوجه متوازي المستطيلات ، واضلاع الأوجه تسمى أحرف ، وكل وجهين متقابلين منه يكونان متوازين ومتطابقين (متساويين في المساحة) .

ان الوجه الذي يستند اليه الجسم يسمى القاعدة السفلى والوجه الذي يقابله يسمى القاعدة العليا ، والأوجه الاربعة الاخرى تسمى بالاوجه الجانبية للجسم ، أما حرفه العمودي على القاعدة فيسمى الارتفاع ، كما يسمى بعدي قاعدته بطول وعرض القاعدة .



(١) المساحة السطحية الجانبية =

مجموع مساحات أوجه الجانبية

= س × ع + ص × ع + س × ع + ص × ع

= (س + ص + س + ص) × ع

= ٢ (س + ص) × ع

= محيط القاعدة × الارتفاع مقاسة بالوحدات نفسها

بالرموز مسج = م × ع

حيث مسج : هي المساحة الجانبية ، م : محيط القاعدة ، ع هو الأرتفاع .

(٢) المساحة السطحية الكلية = المساحة السطحية الجانبية + مساحة القاعدتين

وبالرموز : مسك = مسج + ٢ق مقاسة بالوحدات نفسها

حيث مسك : المساحة السطحية الكلية ،ق: مساحة القاعدة = س × ص

(٣) الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع = الطول × العرض × الارتفاع

واذا رمزنا للحجم بـ (ح) فأن :

ح = ق ×ع = س ص ع مقاسة بالوحدات نفسها اي ان حجم الجسم يساوي حاصل ضرب أبعاده الثلاثة .

امثلة :

(١) علبة على شكل متوازي المستطيلات لها غطاء طول قاعدتها ١٢ سم وعرضها ٧ سم فأذا كان ارتفاع العلبة ٨ سم فما مساحتها الكلية ؟

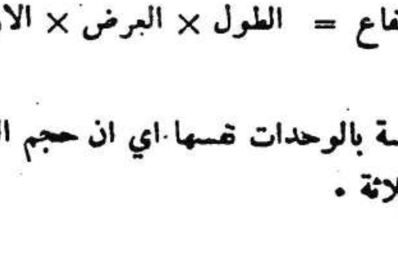
الحل : المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

لكن المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الأرتفاع

= ٢ (٧ + ١٢) × ٨

= ٢ × ١٩ × ٨

= ٣٠٤ سم٢



∴ مساحة القاعدتين = ٢ (٧ × ١٢)

= ٢ × ٨٤ = ١٦٨ سم٢

∴ المساحة الكلية = ٣٠٤ + ١٦٨ = ٤٧٢ سم^{٢}

(٢) ما حجم متوازي مستطيلات أبعادة ٨ سم ، ٥ سم ، ٢ر٠م ؟

الحل : ٢ر٠م = ٢٠ سم

الحجم = الطول × العرض × الأرتفاع

= ٨ × ٥ × ٢٠

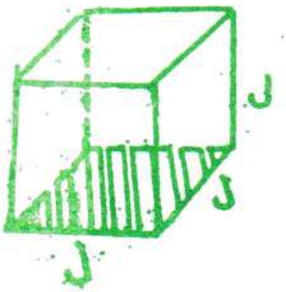
= ٨٠٠ سم^{٣}

(٣) ما ارتفاع متوازي مستطيلات حجمه ٩٦٠ سم^{٣} وطول قاعدته ١٢ سم وعرضها ٨ سم ؟

الحل : الحجم = (الطول × العرض) × الارتفاع

٩٦٠ = (١٢ × ٨) × ع

∴ ع = $\frac{٩٦٠}{١٢ \times ٨}$ = ١٠ سم الارتفاع



المكعب :

هو متوازي مستطيلات ابعاده متساوية .

اي ان : الطول = العرض = الارتفاع

∴ المساحة الجانبية = ٤ ل^{٢} حيث ل طول ضلع المكعب

المساحة الكلية = ٦ ل^{٢}

الحجم = ل^{٣}

فالمكعب الذي طوله حرفه (ضلعه) = ٥سم يكون حجمه ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ سم^{٣}

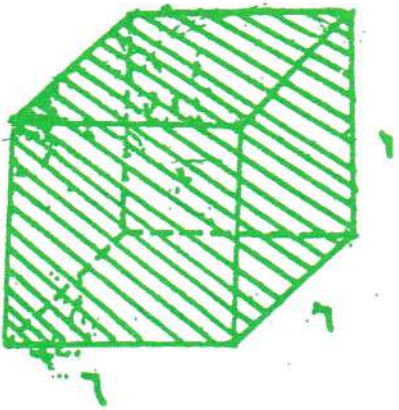
مثال (١) :

جد المساحة الكلية والحجم لمكعب طول ضلعه ٦ سم

الحل : المساحة الجانبية = ٤ × مساحة وجه

= ٤ × (٦ × ٦)

= ٤ × ٣٦ = ١٤٤ سم٢



المساحة الكلية = ٦ × مساحة وجه واحد

= ٦ × (٦ × ٦)

= ٦ × ٣٦ = ٢١٦سم٢

الحجم = ٦ × ٦ × ٦ = ٢١٦ سم٣

نلاحظ هنا ان العدد الدال على المساحة الكلية يساوي العدد الدال على الحجم ولكن بوحدات مختلفة طبعاً .

مثال (٢) :

خزان مكعب الشكل طول ضلعه ١٢ متر مملوء بالبنزين ، افرغ في خزان آخر على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته ١٨ م ، ١٦ م . فكم يبلغ ارتفاع البنزين فيه ؟

الحل: كمية البنزين في الخزان الاول = ١٢ × ١٢ × ١٢ = ١٧٢٨ متر مكعب

مساحة قاعدة الخزان الثاني = ١٦ × ١٨ = ٢٨٨ م٢

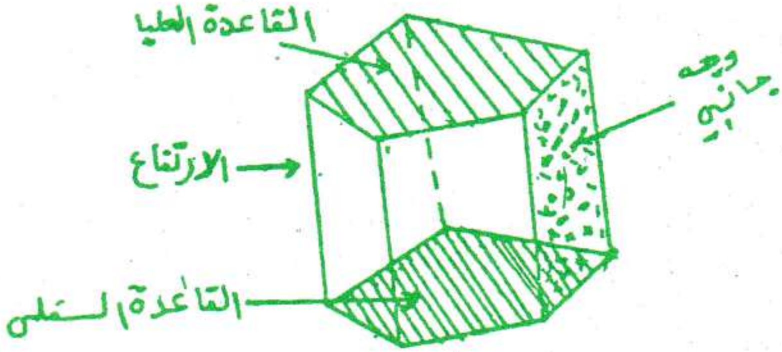
∴ ارتفاع البنزين في الخزان الثاني = الحجم + مساحة القاعدة

= ١٧٢٨ + ٢٨٨

= ٦ متر

المنشور القائم والاسطوانة الدائرية القائمة :-

الشكل أدناه يمثل منشوراً قائماً ، وهو جسم محاط بأوجه مستطيلة الشكل تسمى الأوجه الجانبية للمنشور وبمضلعين متوازيين ومتطابقين يسميان قاعدتي المنشور العليا والسفلى .



ان عدد أوجه المنشور يساوي عدد اضلاع القاعدة واحرفه الجانبية متساوية وطول احدها يمثل ارتفاع المنشور ، اما محيط قاعدته فهو محيط قاعدتي المنشور العليا والسفلى .

يسمى المنشور حسب شكل قاعدته ، فان كانت القاعدة مثلثة سمي المنشور ثلاثياً واذا كانت القاعدة مخمسة الشكل سمي المنشور خماسياً وهكذا ....

ان كلاً من المكعب ومتوازي المستطيلات هو منشور رباعي قائم.

(١) المساحة الجانبية للمنشور القائم = محيط القاعدة × الارتفاع   مقاسة بالوحدات نفسها

بالرموز مسج = م × ع

(٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

بالرموز : مسك = مسج + ٢ق

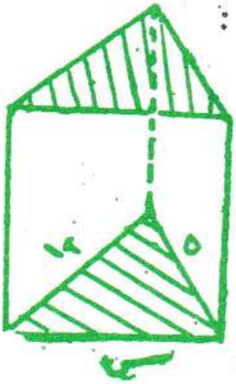
(٣) الحجم = مساحة القاعدة في الارتفاع

بالرموز : ح = ق × ع   مقاسة بالوحدات نفسها

مثال (١) :

منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ١٧سم وقاعدته مثلث قائم الزاوية طول كل من ضلعيه القائمين ٥سم ، ١٢سم ، جد : مساحته الكلية وحجمه

الحل : لكي نجد المساحة الكلية للمنشور لابد من ايجاد المساحة الجانبية له وهذا يتطلب معرفة محيط قاعدة المنشور التي هي عبارة عن مثلث قائم الزاوية وتره مجهول . فاذا رمزنا للوتر بالحرف س فان :



$س^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢}$ (نظرية فيثاغورس)

$= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$

∴ س = ١٣سم طول الوتر

∴ محيط القاعدة = ٥ + ١٢ + ١٣ = ٣٠ سم

المساحة الجانبية للمنشور القائم = محيط القاعدة × الارتفاع

$= ٣٠ \times ١٧ = ٥١٠$ سم^{٢}

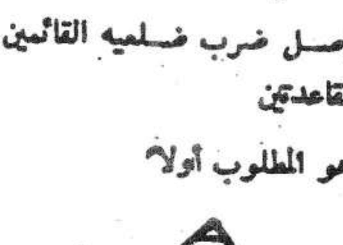
مساحة القاعدتين = ٢ × (مساحة قاعدة)

$= ٢ \times (\frac{١}{٢} \times ٥ \times ١٢) = ٦٠$ سم^{٢}

مساحة المثلث القائم الزاوية تساوي نصف حاصل ضرب ضلعيه القائمين .

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$= ٥١٠ + ٦٠ = ٥٧٠$ سم^{٢} وهو المطلوب أولاً

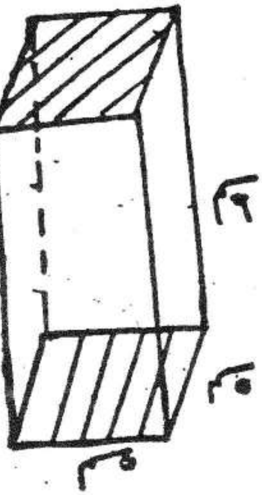


الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$= (\frac{١}{٢} \times ٥ \times ١٢) \times ١٧ = ٥١٠$ سم^{٣}

مثال (٢) :

منشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٥سم وارتفاعه ٩سم .
جد مساحته الكلية وحجمه .



الحل : المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= (٥ × ٤) × ٩ = ١٨٠ سم^2

مساحة القاعدتين = ٢ × (٥ × ٥) = ٥٠ سم^2

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ١٨٠ + ٥٠ = ٢٣٠ سم^2

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

= (٥ × ٥) × ٩

= ٢٢٥ سم^3

الاسطوانة الدائرية القائمة :

يبين الشكل الآتي اسطوانة دائرية قائمة والتي تكون فيها القاعدتان العليا والسفلى عبارة عن دائرتين متطابقتين .

تعتبر القطعة المستقيمة بجـ العمودية على كل من قاعدتي الاسطوانة مولداً للسطح الاسطواني وتمثل ارتفاع الاسطوانة ، أما القطعة ككَ التي تصل بين مركزي القاعدتين فتسمى محور الاسطوانة ويكون بجـ = ككَ ويسمى كل منهما ارتفاعاً للاسطوانة الدائرية القائمة .

المساحة الجانبية للاسطوانة الدائرية القائمة = مساحة السطح الاسطواني
= محيط القاعدة × الارتفاع

وبالرموز : مسج = (٢نق ط) × ع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

وبالرموز : مسك = ٢ س ط ع + ٢ س^٢ ط

حجم الاسطوانة الدائرية القائمة = مساحة القاعدة × الارتفاع

وبالرموز : ح = س^٢ ط × ع

مثال (١) جد المساحة الكلية لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها ٧ سم وارتفاعها ٩ سم .

الحل : المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$= ٢ \text{ س ط} \times \text{ع}$$

$$= ٢ \times ٧ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٩$$

$$= ٣٩٦ \text{ سم}^٢$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$= ٣٩٦ + ٢ \times \left(٧ \times ٧ \times \frac{٢٢}{٧}\right)$$

$$= ٣٩٦ + ٣٠٨ = ٧٠٤ \text{ سم}^٢$$

مثال (٢) :

اسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها ٣٫٥م وارتفاعها ٦ متر . جد حجمها .

الحل :

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= \text{س}^٢ \text{ ط} \times \text{ع}$$

$$= ٣٫٥ \times ٣٫٥ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٦$$

$$= ٢٣١ \text{ م}^٣$$

مثال (٣) :

المساحة الجانبية لاسطوانة دائرية قائمة ٨٨ سم^{٢} . فاذا كان ارتفاعها ٤سم جد حجمها .

الحل : المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$٨٨ = (٢ س ط) \times ع$$

$$٨٨ = ٢س \times \frac{٢٢}{٧} \times ٤$$

$$٨٨ \times ٧ = ٢ س \times ٨٨$$

$\therefore$ ٧ = ٢ س بالحذف

$س = \frac{٧}{٢}$ سم طول نصف القطر

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= س^{٢} ط \times ع$$

$$= \frac{٧}{٢} \times \frac{٧}{٢} \times \frac{٢٢}{٧} \times ٤ = ١٥٤ \text{ سم}^{٣}$$

تمارين

١) جد المساحة الكلية لمكعب طول حرفه يساوي ٤سم .

٢) جد حجم مكعب مساحته الكلية ١١٧٦سم^{٢} .

٣) متوازي مستطيلات أبعاده ٥ر٢م ، ٢م ، ٣ر١م . جد حجمه ومساحته الكلية .

٤) منشور ثلاثي قائم مساحته الجانبية ٩٠سم^{٢} وارتفاعه ٥سم . جد أطوال اضلاع قاعدته اذا كانت النسبة بين أطوالها كنسبة ٤ : ٣ : ٢ .

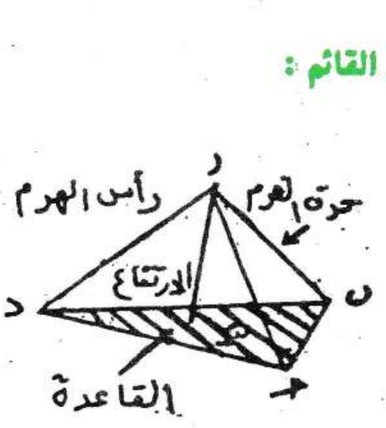
٥) منشور قائم ارتفاعه ٨سم وقاعدته على شكل مربع طول ضلعه ٣سم • جد مساحته الكلية وحجمه •

٦) اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠سم وقطر قاعدتها ١٤سم • جد مساحتها الكلية •

$$\left(ط = \frac{٢٢}{٧} \right)$$

٧) يراد عمل اسطوانة دائرية قائمة من الصفيح بحيث يكون طولها ١٨سم ونصف قطر قاعدتها ٦سم ، فما مساحة الصفيح اللازم لصنعها ؟ علماً بأنها مفتوحة من الاعلى •

(٣) الهرم المنتظم والمخروط الدائري القائم :



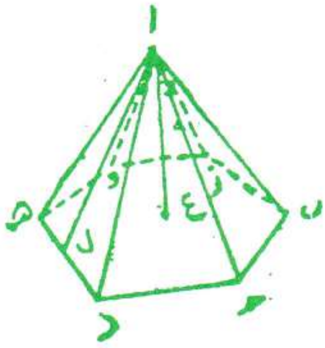
الشكل المجاور يمثل هرماً •
وهو جسم محاط بقاعدة على شكل مضلع محدب وبأوجه جانبية مثلثية الشكل تشترك بنقطة واحدة خارجة عن قاعدته تسمى رأس الهرم• والقطع المستقيمة التي تصل رأس الهرم برؤوس مضلع قاعدته تسمى ....
احرف الهرم وهي : رب ، رجـ ، رد • أما القطعة المستقيمة $\overline{رهـ}$ المرسومة من رأس الهرم عمودية على قاعدته فتسمى ارتفاع الهرم •

يسمى الهرم ثلاثياً او رباعياً او ••• اذا كانت قاعدته مثلثة الشكل او رباعية او •••

الهرم المنتظم :

هو الهرم الذي قاعدته مضلع منتظم والعمود النازل من رأسه على قاعدته يمر من مركز الدائرة المرسومة خارجها ويسمى ارتفاع الهرم ويرمز له بالحرف

(ع) . اما أوجه الهرم المنتظم فهي مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة فيما بينها . وارتفاع أحد أوجهه يسمى الارتفاع الجانبي له ويرمز له بالحرف (ل) ـ انظر الشكل الآتي ـ



المساحة الجانبية للهرم المنتظم = مجموع مساحات اوجهه الجانبية التي عددها يساوي عدد اضلاع قاعدته التي هي مضلع منتظم .

المساحة الجانبية = ن × مساحة وجه واحد (ن : عدد اضلاع مضلع القاعدة)

= ن × (½ د هـ × ل)

= ½ [ن × (د هـ) × ل]

= ½ × (ن × د هـ) × ل حيث ان ن × د هـ = محيط القاعدة

= ½ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

مسج = ½ م ل مقاسة بالوحدات نفسها

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

مسك = مسج + ق

الحجم = ⅓ مساحة القاعدة × الارتفاع

وبالرموز ح = ⅓ ق × ع

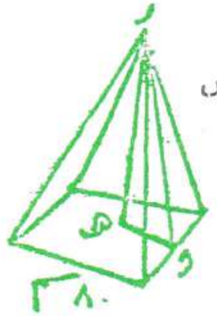
مثال (١) هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٨سم وارتفاعه ١٢سم ،جد حجمه ؟

الحل : مساحة القاعدة (مثلث متساوي الاضلاع) = $\frac{1}{4}$ مربع الضلع × $\sqrt{3}$

$= \frac{1}{4} \times 64\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

حجم الهرم = $\frac{1}{3} \times 16\sqrt{3} \times \cancel{12}^{4} = 64\sqrt{3}$

مثال (٢) جد المساحة الكلية لهرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٨سم وارتفاعه ٣سم .



الحل :- △ ر و هـ فيه :

(ر و)^2 = (هـ و)^2 + (ر هـ)^2 نظرية فيثاغورس

ل^2 = (٤)^2 + (٣)^2 (لان هـ و = $\frac{1}{2}$ طول ضلع قاعدته)

ل^2 = ١٦ + ٩ = ٢٥

∴ ل = ٥سم الارتفاع الجانبي

المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ م ل

= $\frac{1}{2}$ × (٤ × ٨) × ٥

= ٨٠سم^2

مساحة القاعدة = ٨ × ٨ = ٦٤ سم^2

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٨٠ + ٦٤ = ١٤٤ سم^2

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ ق ع

= $\frac{1}{3}$ × ٦٤ × ٣ = ٦٤ سم^2

المخروط الدائري القائم :

الشكل المرسوم يمثل مخروطاً دائرياً رأسه النقطة (ر) ، قاعدته على شكل دائرة . وقطعة المستقيم التي تصل بين رأسه واي نقطة من نقاط محيط الدائرة تسمى مولد المخروط والعمود النازل من الرأس على القاعدة يسمى ارتفاع المخروط .

ويسمى المخروط دائرياً قائماً اذا كان العمود النازل من رأسه على قاعدته يمر من مركزها وبذلك تكون جميع مولداته متساوية في الطول وترمز لها بالحرف (ل) وتسمى بالارتفاع الجانبي للمخروط

المساحة الجانبية = نصف محيط قاعدته × ارتفاعه الجانبي

= ½ م ل = ½ (٢ نق ط) × ل (لان القاعدة دائرة)

= نق ط ل

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= نق ط ل + نق^{٢} ط

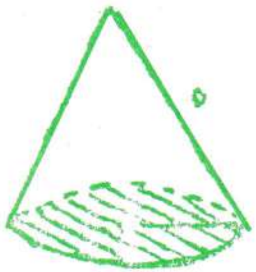
الحجم = ⅓ مساحة القاعدة × الارتفاع

= ⅓ × نق^{٢} ط × ع

مثال (١) : مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٧سم وارتفاعه الجانبي ٥ سم · جد مساحته الكلية ·

الحل : المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= نق ط ل + نق^{٢} ط



= ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٥ + ٧ × ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$

= ١١٠ + ١٥٤

= ٢٦٤ سم^{٢}

مثال (٢): مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ١٫٢ سم وارتفاعه ٨سم ·جد حجمه ·

الحل: الحجم = ⅓ (نق^{٢} ط) × ع

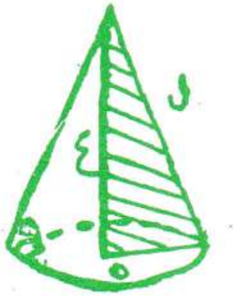
= ⅓ × ١٫٢ × ١٫٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٨

= ٩٦ ٫ ٣٦ سم^{٢}

مثال (٣) : مخروط دائري قائم حجمه $\frac{٢٢٠٠}{٧}$ سم٣ ونصف قطر قاعدته ٥سم .

جد مساحته الجانبية .

الحل : الحجم = ⅓ نق² ط × ع



$\frac{٢٢٠٠}{٧}$ = ⅓ × ٥ × ٥ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ع

$\frac{٢٢٠٠}{٧}$ = $\frac{٥٥٠}{٢١}$ ع

∴ ع = $\frac{٢٢٠٠ \times ٢١}{٥٥٠ \times ٧}$ = ١٢سم

ولايجاد المساحة الجانبية للمخروط لا بد من معرفة طول ارتفاعه الجانبي.(ل)

ل² = ع² + نق² (نظرية فيثاغورس)

∴ ل² = (١٢)² + (٥)² = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩

∴ ل = ١٣سم الارتفاع الجانبي

المساحة الجانبية = ½ م ل = نق ط ل

= ٥ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٣ = ٢٠٤ $\frac{٢}{٧}$ سم²

الـكرة :

الشكل الجانبي يمثل كرةوهي جسم محاط بسطح كل نقطة منـه تبعد بيـعد ثابت عن نقـطة داخله تسمى مركز الكرة ، والبعد الثابت الذي يمثله طول القطعة المستقيمة التي تصل مركز الكرة بأي نقـطة من نقاط سـطحها يسمى نصف قطر الكرة .

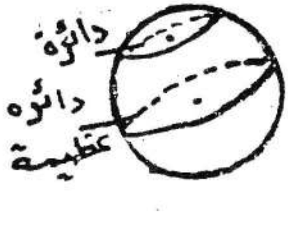
اذا قطعـت الكـرة بمسـتوى كان المقطع الحاصـل دائـرة ، واذا مـرّ المستوى القاطـع من مركز الكـرة فان المقطع الحاصـل يكـون دائرة عظيمة ، طول نصف قطرها يساوي طول نصف قطر الكرة .

(١) المساحة السطحية للكرة = ٤ × مساحة دائرة عظيمة

$= ٤ س^{٢} ط$

(٢) حجم الكرة = المساحة السطحية للكرة × $\frac{1}{٣}$ نصف قطرها

$= ٤ س^{٢} ط \times \frac{1}{٣} س$



$= \frac{٤}{٣} س^{٣} ط$

مثال(١) : جد المساحة السطحية والحجم لكرة نصف قطرها ٧سم .

الحل : المساحة السطحية $= ٤ س^{٢} ط = ٤ \times ٧ \times ٧ \times \frac{٢٢}{٧} = ٦١٦$ سم^{٢} .

الحجم = $\frac{٤}{٣}$ س^{٣} ط = $\frac{٤}{٣}$ × ٧ × ٧ × ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$ = $\frac{١}{٣}$ ١٤٣٧ سم^{٣}

مثال (٢) : كرة حجمها ٣٨٫٨٠٨ سم^{٣} . ما مساحتها السطحية ؟

الحل : لكي نجد المساحة السطحية للكرة لابد من معرفة نصف قطرها أولاً .

الحجم = $\frac{٤}{٣}$ س^{٣} ط

٣٨٫٨٠٨ = $\frac{٤}{٣}$ × س^{٣} × $\frac{٢٢}{٧}$

٣٨٫٨٠٨ = $\frac{٤}{٣}$ × س^{٣} × $\frac{٢٢}{٧}$

س^{٣} = $\frac{٣٨٫٨٠٨ \times ٣ \times ٧}{٤ \times ٢٢}$ = $\frac{٩٢٦١}{١٠٠٠}$

∴ س = $\frac{٢١}{١٠}$ = ٢٫١ سم

المساحة السطحية = ٤ × ٢٫١ × ٢٫١ × $\frac{٢٢}{٧}$ سم^{٢}

= ٥٥٫٤٤ سم^{٢} - ١٠٨

الفصل السابع
الاحصـــاء

علـم يبحث في طريقـة جمـع الحقائق الخاصـة بالظـواهر الاقتصادية والاجتماعية والعلمية وكيفية تسجيلها وتبويبها وتلخيصها بطريقة يسـهل بهـا معرفة اتجاهات هذه الظواهر وتحليلها والحكم عليها ومقارنتها بغيرها .

والاحصاء بمعنى الحصر والعد فكرة قديمة يرجع منشؤها الى عهـد بعيد في تاريخ المدنية الانسانية فقد كان يعني بجمع المعلومات التي تهم الحكومـة فتسجل في دفاتر يمكن الرجوع اليها واستخدامها في تصريف امور الدولة .

وعندما تدرج الانسان في مدنيته وتعددت مرافق الحياة استخدمت فكرة الاحصاء في نواحي كثيـرة من اجل الاهتـداء الى حقـائق الاموروانتجـاهات الظواهر الاقتصادية والاجتماعية والعلمية .

ففي العلوم الاقتصادية يعتبر علم الاحصاء احد العناصر الأساسية التي تعتمـد عليها نظـريات علم الاقتصـاد وفي دوائر الاعمال المالـيـة والصـناعية والتجارية نجد البيانات الاحصائية هي المرشد الأول الذي يهتم به المشتغلون بهذه الاعمال وفي العلوم الاجتماعية والسياسية يستخدم الاحصاء كأداة لقياس درجة رفاهية الشعب وثقافته . وكذلك في نشاطات النشر والاعلام والقطاعات كافة الصناعية والزراعية .

ولم يراع في باديء الامر أن يكون جمع وتسجيل الحقائق بشكل جداول كما هو عليه الآن بل كان هذا التسجيل يقتصر على وصف تلك الحقائق بالكلمات ثم ظهرت بعد ذلك افضلية استخدام الجداول الاحصائية لما فيها من الوضوح والدقة . والحقائق التي نجمعها عن الظواهر التي نريد بحثهـا تسمى (البيانات الاولية) وهذه البيانات ترتب وتنسق وتقدم بطريقة تسـاعد على فهم مدلولها والاستفادة منها .

والوسائل المستخدمة لجمع البيانات وطريقة عرضها تعتمد على نوع البيانات والغرض المقصود منها ٠وقد استعمل العلماء(علماء الاحصاء والرياضيات والطبيعيات) الاشكال الهندسية كالدوائر والمستطيلات والخطوط لتوضيح البيانات الاحصائية وكذلك الصور التي لها صلة بالموضوع فيعبر عن عدد النفوس بصورة مختلفة للانسان تتناسب حجومها مع عدد النفوس ويعبر عن انتاج النفط براميل مختلفة السعة تتناسب مع كمية النفط المنتجة ٠

والاشكال الهندسية او الصور التي ترسم لتوضيح البيانات الاولية تسمى الاشكال البيانية ٠

العمليات الاحصائية :

لأجل تطبيق الاحصاء في المجالات المختلفة تتبع الخطوات الآتية :

١ ـ جمع البيانات ٢ ـ تنظيم البيانات ٣ ـ معالجة البيانات رياضياً اي تطبيق القوانين الاحصائية ٤ ـ التفسير والاستنتاج

واليك شرح كل مرحلة من المراحل ٠

١ ـ جمع البيانات :

البيانات هي المعلومات الاولية العددية عن عينة او نموذج معين دون الحاجة الى دراسة الكل والذي يسمى المجتمع والمجتمع هو مجموعة من القيم التي لها صفات مشتركة قابلة للملاحظة والقياس والعينة هي جزء من المجتمع تكون خواصها الاحصائية خواص المجتمع تقريباً نفسها أما البيانات فنحصل عليها من المصادر الحكومية او باستفتاء او باختيار عينة والطريقة المثلى لاختيار هذه العينة هي الطريقة العشوائية ونقصد بهذه الطريقة اختيار مجموعة صغيرة من مجموعة كبيرة بطريق الصدفة اي بشكل غير مقصود ٠

٢ ـ تنظيم البيانات :

تنظيم البيانات التي نحصل عليها عادة بجداول احصائية اورسوم بيانية لمعالجتها رياضيا ولسهولة الاطلاع عليها ومعرفة بعض الدلائل الاولية منها٠

٣ ـ معالجة البيانات رياضيا :

والمقصودهنا بالمعالجة الرياضية هي تطبيق القوانين الاحصائية المناسبة وذلك لاستخراج نتائج عـددية لها دلالة احصائية كاستخراج المتوسطات (الوسـط العـددي والهندسي •••) او الانحـرافات وغيـرها من الامور الاحصائية الاخرى

٤ ـ التفسير والاستنتاج :

هذه المرحلة من أهم المراحل الاحصائية وتتطلب التفسير الامانة وعـدم التحيز والالمام التام بالموضوع الذي يجري فيه الاحصاء •

طرق عرض البيانات :

حينما نحصل على أرقام احصائية نرتب هذه الارقام بصورة جداول يسهل قراءتها واستنتاج بعض الحقائق عنها وترتب هذه الجداول من أصغرها عدداً الى اكبرها او من اكبرها الى اصغرها او ترتب بصـورة أخرى حسب نوعية تـلك الاعداد الاحصـائية • فمثلا اذا امتحن مدرس طلابه فسيحصل على اعداد احصائية فان أراد ان يرتبها من اصـغر درجـة الى اكبـرها او يرتبها بصـورة مجموعات على النحو الآتي •

٢٠ـ٢٩	٣٠ـ٣٩	٤٠ـ٤٩	٥٠ـ٥٩	٦٠ـ٦٩	٧٠ـ٧٩	٨٠ـ٨٩	٩٠ـ١٠٠
٢	٣	٥	٣	٢	١٠	٧	٣

وان تنظيم الاعداد الاحصائية بصورة جدول يزيد المعلومات وضوحاً ويسهل علينا بصورة اسرع •

وزيادة في الايضاح اخذ علماء الرياضيات وغيرهم من الفنيين يشرحون الحقائق الفنية بالاشكال البيانية •

والشكل البياني : هو شكل مرسوم يراد به تمثيل الاحصائيات بصورة تسهل فهمها وتقرب القصد منها الى اذهاننا وهناك طرق مختلفة في رسم الاشكال البيانية منها :

١) التمثيل بالمستطيلات البيانية .

٢)التمثيل بالخطوط البيانية (خط منكسر او منحني او مستقيم) .

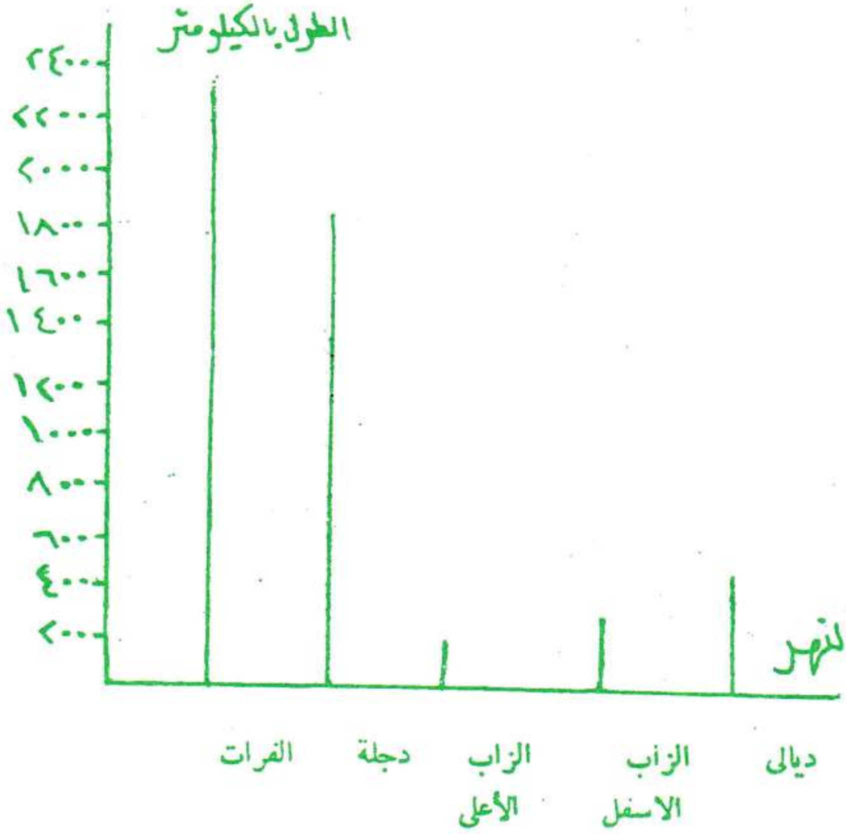
المستطيلات البيانية :

نستعمل المستطيلات في الاكثر لتمثيل الاحصائيات التي تدل على صادرات او واردات او انتاج مادة معينة او عدد طلاب المدارس في سنوات مختلفة وقد تكون المستطيلات رأسية أو أفقية واطوالها يتناسب مع الاعداد التي تمثلها على أن تكون هذه المستطيلات بعرض واحد وترسم مفصولة عن بعضها بمسافات متساوية وقد ترسم أحياناً بدون مسافات تفصلها .

مثال : الجدول التالي يبين اطوال انهار العراق

النهر	الفرات	دجلة	الزاب الاعلى	الزاب الاسفل	ديالى
الطول بالكيلومتر	٢٣٥٠	١٨٥٠	١٥٠	٢٥٠	٤٥٠

١) نرسم مستقيمين متعامدين الأفقي منها يمثل أسماء الأنهار والعمودي (الشاقولي) يمثل الطول بالكيلومتر ، نقسم الشاقولي منها إلى أقسام متساوية ابتداء من نقطة التقاطع ثم نجعل القسم الواحد يمثل عدداً من الكيلومترات ومن المناسب هنا أن يمثل كل ٢٠٠ كيلومتر سنتمتر واحد لأن أكبر عدد عندنا هو (٢٣٥٠) كم طول نهر الفرات ومن الافضل ان يكون الرسم على ورق المربعات .



ملاحظة : تستعمل المستطيلات البيانية للمقارنة بين احصائيتين او اكثر بينهما صفة مشتركة كما في المثال التالي .

الجدول **التالي** : يبين معدل اوزان البنين البنات مقدرة بالكيلوغرام في الاعمار المبينة في الجدول .

العمر	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
البنين	٣٥	٣٨	٤٢	٤٧	٥٣
البنات	٣٤	٣٨	٤٣	٤٨	٥٣

لاحظ الشكل وادرسه واكتب ملاحظاتك عنه .

الخطوط البيانية :

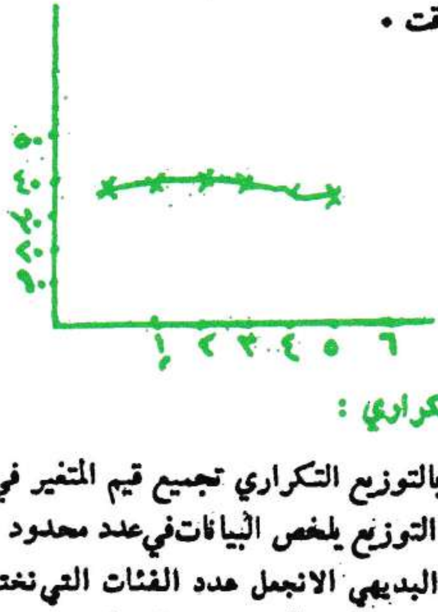
تستعمل الخطوط البيانية في الرياضيات والفيزياء والطب والعلوم الاخرى واهميتها تتمثل في انه يمكن استخراج معلومات هامة منها ولذلك يجب العناية برسمها بصورة دقيقة .

مثال : الجدول التالي يمثل درجات الحرارة في يوم من أيام تموز

الساعة	١٢	١	٢	٣	٤	٥	٦
درجة الحرارة	٤٠	٤٢	٤٢	٤١	٣٨	٣٦	٣٤

نرسم مستقيمين متعامدين الافقي منهما يمثل الوقت والشاقولي يمثل درجات الحرارة . ونعين كل نقطة تمثل الوقت ودرجة الحرارة . اي نعين النقاط (١٢ ، ٤٠) ، (١ ، ٤٢) (٢ ، ٤٢) ... هكذا

نصل بين النقاط بخط منحني متصل لأن التغير في درجة الحرارة مستمر على مرور الوقت .



التوزيع التكراري :

يقصد بالتوزيع التكراري تجميع قيم المتغير في عدد من الفئات المتساوية الطول وهذا التوزيع يلخص البيانات في عدد محدود من الفئات لتسهل معالجتها رياضيا ومن البديهي الا نجعل عدد الفئات التي نختارها قليلاً فلا تستفيد من عملية التجمع ولا كثيراً فيضيع معالم التجميع ، وليست هناك قاعدة ثابتة لتحديد هذا العدد لأنه يتوقف على طبيعة البيانات والهدف من دراسة البيانات

ومقدار دقتها .

مثال : كانت درجات ٣٠ طالباً في امتحان الرياضيات كالآتـي :

٣٢ ، ٧٣ ، ٦٠ ، ٦٧ ، ٨٠ ، ٥٣

٤٣ ، ٥٦ ، ٧٨ ، ٨٠ ، ٩٧ ، ٦٢

٥٨ ، ٨٥ ، ٨٧ ، ٩٥ ، ٦٥ ، ٦٠

٥٣ ، ٧٠ ، ٧٣ ، ٧٠ ، ٨٥ ، ٩٥

٧٢ ، ٧٥ ، ٩٠ ، ٧١ ، ٧٥ ، ٧٢

والمطلوب تبويب هذه المعلومات بجدول تكراري

بالنظر الى الدرجات نجد أن أقل درجة هي ٣٢ واكبر درجة هـي ٩٥ ويعني هذا أن الدرجات تقع بين ٣٢ ، ٩٥ ولكي نلخص هذه المجموعة من الدرجات نقسمها الى مجموعات متقاربة في الدرجات نطلق على كل مجموعة (فئة) ومن المناسب هنا أن نجعل طول كل فئة (١٠) درجات فتكون الفئات كالآتي :

(٣٠ – ٣٩ ، ٤٠ – ٤٩ ، ٥٠ – ٥٩ ، ٦٠ – ٦٩ ، ٧٠ – ٧٩ ، ٨٠ – ٨٩ ، ٩٠ – ١٠٠)

ونضعها بالصورة الآتية :

٣٠ـ٣٩	٤٠ـ٤٩	٥٠ـ٥٩	٦٠ـ٦٩	٧٠ـ٧٩	٨٠ـ٨٩	٩٠ـ١٠٠

ويسمى هذا الجدول مغلقاً لأن حده الأدنى معلوم ، كذلـك الحد الأعلى

ويمكن كتابة الفئات بصورة عمودية كالآتي :

٣٠ـ٣٩	
٤٠ـ٤٩	
٥٠ـ٥٩	
٦٠ـ٦٩	
٧٠ـ٧٩	
٨٠ـ٨٩	
٩٠ـ١٠٠	

٢ ـ تقرأ درجة كل طالب ونضع علامة ١ أسفل او الى يسار الفئة التي تقع فيها الدرجة اي أننا (نفرغ) درجات الثلاثين طالباً في الفئات التي كتبناها ولتسهيل عملية التفريغ نضع كل خمس علامات في حزمة واحدة وذلك بشطب كل أربع منها بالعلامة الخامسة فيكون الجدول كالآتي :

الفئات	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	٧٠-٧٩	٨٠-٨٩	٩٠-١٠٠
التكرارات	1	1	1111	~~1111~~	~~1111~~ ~~1111~~	~~1111~~	1111

٣ ـ نلاحظ العلامات التي تجمعت في كل فئة ونكتب عدداً يدل على عدد العلامات تحت كل فئة او الى يسارها كالآتي :

الفئات	٣٠ـ٣٩	٤٠ـ٤٩	٥٠ـ٥٩	٦٠ـ٦٩	٧٠ـ٧٩	٨٠ـ٨٩	٩٠ـ١٠٠
التكرارات	١	١	٤	٥	١٠	٥	٤

وهذه هي الصورة العمودية .

الفئات	التكرارات	الفئات	التكرارات
٣٠ ـ ٣٩	١	٦٠ ـ ٦٩	٥
٤٠ ـ ٤٩	١	٧٠ ـ ٧٩	١٠
٥٠ ـ ٥٩	٤	٨٠ ـ ٨٩	٥
		٩٠ ـ ١٠٠	٤

المدرج التكراري

يمكن تمثيل التوزيعات التكرارية بمدرج تكراري كما في الشكل الآتي :

مثال : مثل الجدول التكراري الآتي بمدرج تكراري .

الفئات	١٢ـ	١٦ـ	٢٠ـ	٢٤ـ	٢٨ـ	٣٢ـ	٣٦ـ٤٠
التكرارات	٥	٨	١٢	١٨	١٠	٧	٤

: خطوات العمل

١ ـ نرسم محورين متعامدين الافقي منها لتمثيل الفئات بالجدول على الأغلب والرأسي يمثل التكرارات (غالباً) •

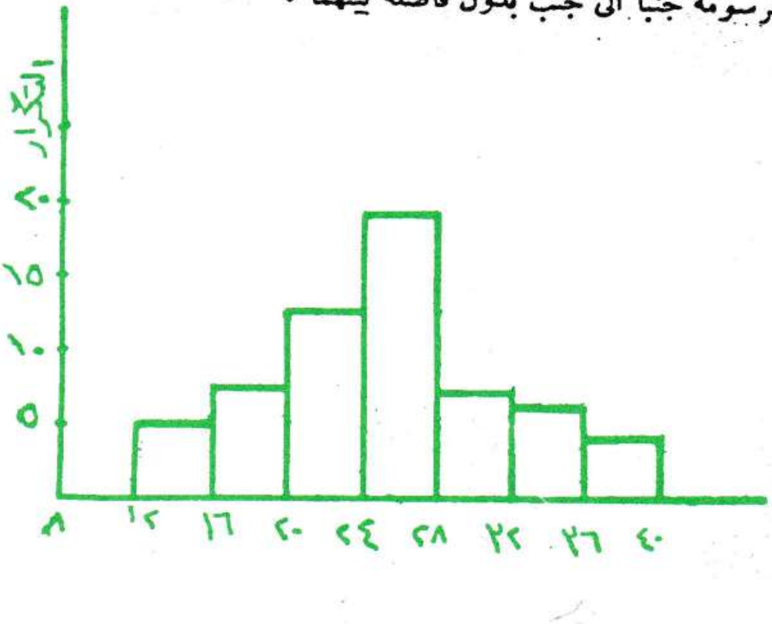
٢ ـ نختار للمحور الأفقي مقياس رسم بحيث يكفي لتمثيل الفئات كلها ، وللمحور الرأسي مقياس رسم آخر يكفي لتمثيل اكبر التكرارات بالجدول •

٣ ـ نقسم المحور الأفقي بمقياس الرسم الذي يمثل طوله طول الفئة الى اجزاء متساوية عددها يساوي عدد الفئات او اكثر منها بواحدة ، ونبدأ بتقسيم المحور من اليسار بفئة أقل من الحد الادنى للفئة الاولى في الجدول وفي هذا المثال نبدأ بالرقم (٨ ـ) لان طول الفئة (٤) وتستمر بالتقسيم حتى الحد الأعلى للفئة الأخيرة وفي هذا المثال (٤٠) •

٤ ـ نقسم المحور الرأسي الى عدد من الأقسام المتساوية يساوي اكبر تكرار في الجدول وعددها في هذا المثال (١٨) أو أكبر منه قليلا وليكن (٢٠) هنا نبدأ بالتقسيم من الأسفل الى الأعلى ابتداءً من الصفر •

٥ ـ نمثل كل فئة بمستطيل قاعدته تساوي طول الفئة وارتفاعه يساوي تكرار الفئة •

وبذلك نحصل على المدرج التكراري الذي هو مجموعة من المستطيلات المرسومة جنباً الى جنب بدون فاصلة بينهما •



النزعة المركزية

في بعض الاحصائيات يحدث ان يتراكم عدد كبير من قيم المجموعة الاحصائية حول (قيمة معينة) ويقل هذا التراكم تدريجياً على وجه العموم كلما ابتعدت القيم عن هذه القيمة وهذا التراكم او التجمع حول قيمة ما يسمى بالنزعة المركزية للتوزيع وتسمى القيمة التي يحدث حولها التراكم (مقياس النزعة المركزية) كما تسمى (القيمة المتوسطة) أيضاً ، والقيم المتوسطة هي قيم احصائية ذات أهمية كبيرة في وصف التوزيعات ومقارنتها فهي أول قيمة يمكن ان تتخذها لتلخيص او تمثيل المجموعات الاحصائية واليك بعض الانواع من هذه القيم .

١ ـ الوسط الحسابي ٢ ـ الوسط الهندسي ٣ ـ المنوال .

اولاً ـ الوسط الحسابي : الوسط الحسابي لمجموعة من القيم عددها ن هو خارج قسمة المجموع الجبري لهذه القيم على عددها ويرمز له بالرمز سَ

مثال (١) : اذا حصل طالب على الدرجات الآتية لخمس امتحانات فما هو الوسط الحسابي للدرجات اذا كانت ٨٧ ، ٩٣ ، ٨٣ ، ٧٢ ، ٨٥

الحل : ٨٧ + ٩٣ + ٨٣ + ٧٢ + ٨٥ = ٤٢٠

٤٢٠ ÷ ٥ = ٨٤ وهو الوسط الحسابي .

مثال (٢) الجدول التكراري التالي يمثل تبرعات ١٠٠ طالب في مدرسة .

الحل :

مبلغ التبرع	٢٥ر. دينار	٥ر. دينار	١ دينار	٥ر١ دينار	٢ دينار	٣ دينار
عدد الطلاب	١٠	٢٥	٢٠	١٨	٢٢	٥

١٠ × ٢٥ر. = ٥ر٢

٥ر. × ٢٥ = ٥ر١٢

٢٠ × ١ = ٢٠

١٨ × ٥ر١ = ٢٧

٢ × ٢٢ = ٤٤

٣ × ٥ = ١٥

المجموع = ١٢١ دينار

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع التبرعات}}{\text{عدد الطلاب}} = \frac{١٢١}{١٠٠} = ٢١ر١$$

الوسط الحسابي للتبرع في هذه المدرسة

(مثال (٣) :

اذا كان لدينا الجدول التكراري التالي الذي يمثل اطوال (١٠٠) طالب

الفئات بالسنتمترات	التكرار (عدد الطلاب)
١٣٠ — ١٣٢	٥
١٣٣ — ١٣٥	١٨
١٣٦ — ١٣٨	٤٢
١٣٩ — ١٤١	٢٧
١٤٢ — ١٤٤	٨

في هذه الحالة نرتب جدولاً آخر يشتمل على مراكز الفئات ومركز كل فئة يساوي الحد الادنى للفئة + الحد الاعلى للفئة مقسوماً على (٢) وعلى ذلك نكتب مراكز الفئات كالآتي :

مراكز الفئات	التكرارات	م × ك
١٣١	٥	١٣١ × ٥ = ٦٥٥
١٣٤	١٨	١٣٤ × ١٨ = ٢٤١٢
١٣٧	٤٢	١٣٧ × ٤٢ = ٥٧٥٤
١٤٠	٢٧	١٤٠ × ٢٧ = ٣٧٨٠
١٤٣	٨	١٤٣ × ٨٧ = ١١٤٤
		المجموع ١٣٧٤٥

∴ المتوسط الحسابي = ١٣٧٤٥ + ١٠٠ = ١٣٧٫٤٥

والمتوسط الحسابي يستخدم كثيراً في القضايا الاحصائية وله الميزات التالية :

١ — يتأثر كثيراً بالقيم المتطرفة خصوصاً في المجموعات الصغيرة العدد وقد يعطي فكرة خاطئة اذا كانت احدى القيم بالصدفة كبيرة جداً لو صغيرة جداً بالنسبة لباقي القيم ٠

٢ — عندما تكون البيانات تمثل جزءاً من المجتمع فان الوسط الحسابي لهذه البيانات يكون مقياسا جيداً وكفوءاً ٠

ثالثاً ـ الوسط الهندسي :

الوسط الهندسي لمجموعة من القيم عددها ن هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم ويرمزله « هـ »

مثال (١) : ما هو الوسط الهندسي للقيم ٣٢ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ١٠

عدد المفردات هنا ٤ ولذلك فان الوسط الهندسي هو الجذر الرابع لحاصل ضرب الأعداد ٣٢ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ١٠ وعليه فان

$$هـ = \sqrt[4]{32 \times 25 \times 20 \times 10} = \sqrt[4]{2^{8} \times 5^{4}} = 2^{2} \times 5 = 20$$

مثال (٢) : ما هو الوسط الهندسي للبيانات الاحصائية في الجدول التالي

الفئات	١٠ـ١٢	١٣ـ١٥	١٦ـ١٨
التكرارات	٣	٢	٧

الحل : اولاً نجد مراكز الفئات فيكون الجدول التالي

مراكز الفئات	١١	١٤	١٧
التكرارات	٣	٢	٧

$$\text{الوسط} = \sqrt[12]{11^{3} \times 14^{2} \times 17^{7}}$$

ملاحظة : تحسب مثل هذه المقادير بمساعدة اللوغاريتمات او بالآلة الحاسبة

ميزات الوسط الهندسي :

١ ـ لا يكون له اي معنى اذا كانت هناك قيم صفرية او سالبة .

٢ ـ قليل التأثر بالقيم المتطرفة .

٣ ـ يستخدم في دراسة التغيرات في الظواهر التي تميل مفرداتها الى الزيادة بنسب ثابتة كما في دراسة زيادة عدد المتعلمين والزيادة في اسعار السلع .

ثانيا — المنـوال :

هو قيمه المتغير التي تقابل اكبر التكرارات ،اوهو القيمة الاكثر تكراراً في المجموعة . ويسمى أحياناً بالشائع

مثال (١) : جد المنوال للاعداد

٧ ، ٨ ، ٩ ، ٥ ، ١٠ ، ١١ ، ٨

الحل : المنوال هنا هو العدد ٨ لأنه مكرر مرتين

مثال (٢) : جد المنوال لدرجات ١٥ طالباً في مادة الرياضيات .

الدرجة	٤٠	٤٥	٥٠	٦٠	٦٥	٧٠	٧٥
التكرار	٢	١	٤	١	١	٢	٢

المنوال هنا هو ٥٠ لأنه يقابل أكبر التكرارات .

مثال(٣) : جد المنوال من الجدول الأتي : ـ

الاعمار	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦
التكرار	٨	٣٢	٣٢	١٢	٩	٥

الحل : بالنظر للجدول نجد ان اكبر التكرارات هي ٣٢ وهي موجودة تحت الـ ١٢ ، ١٣ فالاعمار هنا لهـا منوالان هما ١٢ سنة ، ١٣ سـنة وهذه هي احدى عيوب المنوال .

مثال (٤) جد المنوال من الجدول الاتي

فئات الاعمار	١٨ ـ	٢٠ ـ	٢٢ ـ	٢٤ ـ	٢٦ ـ ٢٨
عدد الطلاب	١٩	٤٢	٢٢	٩	٧

الحل : نلاحظ هنا ان الفئة (٢٠-) تقابل اكبر التكرارات ولذلك فيمكن

$$\text{اعتبارها هي القيمة المنوالية ومركزها هو المنوال اي} \frac{٢٠ + ٢٢}{٢} = ٢١ \text{ المنوال}$$

هذه هي الطريقة التي تسمى البدائية .

طريقة المستطيلات :

اذا كان لدينا التوزيع التكراري السابق

١) نرسم مستقيمين متعامدين الأفقي يمثل فئات الاعمار والعمودي يمثل التكرارات .

٢) نرسم ثلاث مستطيلات

أ ـ مستطيلاً يمثل الفئة السابقة للفئة المنوالية .

ب ـ مستطيلاً يمثل الفئة المنوالية .

جـ ـ مستطيلاً يمثل الفئة اللاحقة للفئة المنوالية .

٣) نصل الرأس الأيمن للمستطيل الأول بالرأس الأيمن للمستطيل الثاني .

ثم نصل الرأس الأيسر للمستطيل الثاني بالرأس الأيسر للمستطيل الثالث فيتقاطع المستقيمان في نقطة . ننزل من هذه النقطة عموداً على محور الفئات ثم نقرأ الناتج فيكون هذا المنوال .

ميزات المنوال : -

١ ـ يعتبر اهم المتوسطات الى شركات المنتجات الاستهلاكية بصورة عامة للتعرف على النوع الشائع الذي يفضله الجمهور . ومثال لذلك بائعي الملابس الجاهزة لكي يعرفوا المقاييس الشائعة .

٢ ـ لا يتأثر بالقيم المتطرفة وهو من هذه الناحية يفضل على الوسط الحسابي

تمــارين

(١) اذا كانت درجـات الحرارة العظمى في بغـداد في عشــرة الايام الاولى من شهر تموز كالاتي :

٤٩ ، ٤٦ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٤٥ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٥ ، ٤٨ ، ٤٤

والمطلوب ايجاد ١ ــ الوسط الحسابي

٢ ــ المنوال

(٢) جد الوسط الهندسي للاعداد الآتية

٢ ، ٤ ، ٨

(٣) مثل الجـدول التكــراري الاتي بمدرج تكــراري ٠ ثم جد الوسط الحسابي ٠

الفئات	٤ــ	٨ــ	١٢ــ	١٦ــ	٢٠ــ٢٤
التكرار	٣	٥	٦	٤	٢

الفهرست

الموضوع	الصفحة

حكومەتی هەرێمی کوردستانی عیراق

COUNCIL OF MINISTERS

وەزارەتی پەروەردە

٢٦٩٢ ك ١٩٩٢ ز

MINISTRY OF EDUCATION

ئەنجومەنی وەزیران

١٤٢٦هـ - ٢٧٠٥ كوردي - ٢٠٠٥م

مطبعة الشموع - بغداد